517
А-28
А-28

А. А. АДАМОВ
I-го Петроградского Политехнического Института

СБОРНИК ЗАДАЧ
по
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА — 1922

№ ....

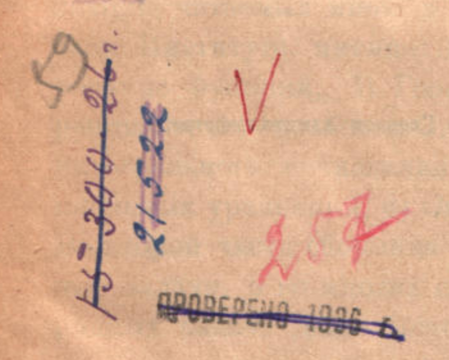
Берегите книгу

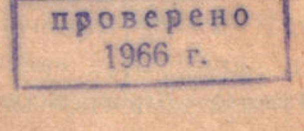
Не перегибайте книгу
во время чтения
Не загибайте углов
Не делайте надписей на книге
Не смачивайте пальцев слю-
ною, перелистывая книгу
Завертывайте книгу в бумагу.

У 517
А 28

А. А. АДАМОВ
Профессор I-го Петроградского Политехнического Института

СБОРНИК ЗАДАЧ
по
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ









ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКВА ✲ 1922

Типография Морского Комиссариата, в Главном Адмиралтействе.

Р. Ц. № .2735 г. Петроград. 6000 экз.

ПРЕДИСЛОВИЕ
к первому изданию.

Настоящий сборник задач содержит упражнения по тем отделам Высшей Математики, которые входят в курс лекций, читаемых мною в I-м Петроградском Политехническом Институте, именно: 1) Высшая Алгебра, 2) Интегрирование функций, 3) Геометрические приложения дифференциального исчисления, 4) Геометрические приложения интегрального исчисления, 5) Интегрирование дифференциальных уравнений, 6) Определенные интегралы, 7) Ряды. Во второй части сборника приведены ответы на предложенные задачи, и во многих случаях, для целой группы однородных задач, даны общие указания на способ решения.

А. Адамов.

Петроград, 6 мая 1911 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

ко второму изданию.

Второе издание отличается от первого лишь исправлением замеченных опечаток.

А. Адамов.

Петроград, 29 августа 1922 г.

ОТДЕЛ I.

Высшая алгебра.

1—2. Обозначая через C_n^m число сочетаний из n элементов по m, доказать:

1. $1 - C_{4k}^2 + C_{4k}^4 - \dots + \frac{1}{2}(-1)^k C_{4k}^{2k} = (-1)^k \cdot 2^{2k-1}$.

2. $C_{4k+2}^1 - C_{4k+2}^3 + C_{4k+2}^5 - \dots + \frac{1}{2}(-1)^k C_{4k+2}^{2k+1} = (-1)^k 2^{2k}$.

3. Найти суммы:

$P_{n-1} = 1 + a\cos b + a^2\cos 2b + \dots + a^{n-1}\cos(n-1)b$.

$Q_{n-1} = \quad a\sin b + a^2\sin 2b + \dots + a^{n-1}\sin(n-1)b$.

4. Доказать:

$$\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdot \sin\frac{3\pi}{n} \dots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

5—8. Разложить на вещественные множители 2-ой степени функции:

5. $x^4 + x^2 + 1$. **6.** $x^4 - x^2 + 1$.

7. $x^6 + x^3 + 1$. **8.** $x^6 - x^3 + 1$.

9—11. Найти корни из комплексных чисел:

9. $\sqrt{-5 + 12i}$. **10.** $\sqrt[3]{i}$ **11.** $\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

12. Найти целую функцию степени не выше 3-ей, которая при делении на $x+2$, $x+1$, $x-1$, $x-2$ дает остатки, равные 1.

13. Найти целую функцию степени не выше **4-ой**, которая при делении на $x+2$, $x+1$, $x-1$, $x-2$ дает остатки $=1$ и при делении на $x-3$ дает остаток 0.

14. Найти целую функцию степени не выше 3-ей, которая при делении на $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$ дает соответственно остатки 4, 3, 2, 1.

15. Найти целую функцию степени не выше 4-ой, которая при делении на $(x-1)^3$ дает остаток 2 и при делении на $(x+1)^2$ дает остаток 1.

16—38. Разложить на простейшие дроби:

16. $\frac{3x^2+3x+1}{2x^3+3x^2+x}$.

17. $\frac{4x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

18. $\frac{x^2+2x-5}{x^3-x^2-4x+4}$.

19. $\frac{x^2-2x+6}{x^3-6x^2+11x-6}$.

20. $\frac{x^3+x^2-2x+1}{x^4-5x^2+4}$.

21. $\frac{x^3-2x^2-3x+7}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}$.

22. $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2}$.

23. $\frac{x^2+6x+7}{x^3+5x^2+9x+5}$.

24. $\frac{x-2}{(x-1)^2(x^2-4x+5)}$.

25. $\frac{2x^3+x^2-2x+1}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

26. $\frac{x^2+x+2}{(x+1)^2(x^2+2x+3)}$.

27. $\frac{1}{(x^2+1)(x^2-x+1)}$.

28. $\frac{2x-3}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$.

29. $\frac{3x^2+x-2}{(x-1)^3(x^2+1)}$.

30. $\frac{x^2+3x-2}{(x-1)^2(x^2-x+1)^2}$.

31. $\frac{2x^2-x+1}{(x-1)^3(x^2+1)^2}$.

32. $\frac{x^6+2x^5-x^3+1}{(x-1)(x^2-x+1)^3}$.

33. $\frac{1}{1+x^4}$.

34. $\frac{1-x^2}{x^4+3x^2+4}$.

35. $\frac{1}{x^4-x^2+1}$.

36. $\frac{x^2}{x^4-3x^2+9}$.

37. $\frac{1}{x^4-6x^2+1}$.

38. $\frac{1}{x^6+1}$.

39—41. Следующие уравнения с кратными корнями привести к системе уравнений с простыми корнями:

39. $x^5-5x^4+5x^3+10x^2-20x+8=0$.
40. $x^7-2x^6+3x^5-x^4-x^3+3x^2-2x+1=0$.
41. $x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1=0$.

42—57. Найти рациональные корни следующих уравнений:

42. $x^3-x^2-4x+4=0$. **43.** $x^4-3x^3-7x^2+27x-18=0$.
44. $x^4-x^3-11x^2-x-12=0$.
45. $x^4+x^3-5x^2+x-6=0$.
46. $x^5-4x^4-10x^3+26x^2-11x+30=0$.
47. $x^5+4x^4-6x^3-31x^2-34x-24=0$.
48. $2x^3-x^2-25x-12=0$. **49.** $20x^4+3x^3+18x^2+3x-2=0$.
50. $4x^4-16x^3+5x^2+19x+6=0$.
51. $8x^5-20x^4-30x^3+65x^2-35x+6=0$.
52. $6x^5+11x^4+5x^3+5x^2-x-6=0$.
53. $25x^4+110x^3+162x^2+38x-15=0$.
54. $10x^4-13x^3+7x^2-13x-3=0$.
55. $6x^4-x^3+5x^2-x-1=0$.
56. $6x^4+13x^3+12x^2+13x+6=0$.
57. $x^5+3x^4-9x^3-21x^2-10x-24=0$.

58—74. Отделить по способу Штурма корни следующих уравнений:

58. $x^5-5x+10=0$. **59.** $x^5+10x-12=0$.
60. $x^6-7x+2=0$. **61.** $x^6+3x-10=0$.
62. $x^6+6x+8=0$. **63.** $2x^3-11x^2-27x+16=0$.
64. $2x^3-17x^2+x+30=0$.
65. $x^4+4x^3-6x^2+8x-1=0$.
66. $x^4-12x^2+28x-18=0$.
67. $x^5-5x^3+10x-6=0$.
68. $x^5-5x^4+5x^3+5x^2-12=0$. **69.** $x^5+5x^4+5x^3-5x^2+12=0$.
70. $x^5-5x^4+5x^3+10x^2-20x+8=0$.
71. $x^4-4x^2+8x-6=0$.
72. $x^6-3x^4+2x^3+12x+10=0$.
73. $x^6-6x^5+12x^4-6x^3-9x^2+24x-6=0$.
74. $x^6+6x^5+12x^4+10x^3+3x^2+12x+22=0$.

75—78. Исключить иррациональность из знаменателей дробей:

75. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}+1}$. **76.** $\frac{2\sqrt[4]{6}+3}{\sqrt{6}-3\sqrt[4]{6}+2}$. **77.** $\frac{2\sqrt[3]{5}-1}{\sqrt[3]{25}+4\sqrt[3]{5}+1}$.

78. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}-1}$.

79—82. Вычислить следующие симметрические функции от корней x_1, x_2, x_3 кубического уравнения $x^3+px+q=0$:

79. $\frac{1}{x_1+x_2}+\frac{1}{x_1+x_3}+\frac{1}{x_2+x_3}$. **80.** $\left(\frac{x_1}{x_2x_3}\right)^2+\left(\frac{x_2}{x_3x_1}\right)^2+\left(\frac{x_3}{x_1x_2}\right)^2$.

81. $\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}$.

82. $\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3}+\frac{x_2^2+x_3^2}{x_1}+\frac{x_3^2+x_1^2}{x_2}$.

83—86. Вычислить следующие симметрические функции от корней данных уравнений:

83. $\sum\frac{x}{x^3+1}$ от корней ур-ия $x^4+1=0$.

84. $\sum\frac{x-1}{x^2+2x+3}$ от корней ур-ия $x^3-x+1=0$.

85. $\sum\frac{1}{x^3+1}$ от корней ур-ия $x^4-x+1=0$.

86. $\sum\frac{1}{x+2}$ от корней ур-ия $x^3+x-1=0$.

87—89. Вычислить (по формулам Кардана) корни следующих кубических уравнений:

87. $x^3-6x^2+9x+2=0$. **88.** $x^3+3x^2-3x-1=0$.

89. $8x^3+12x^2-66x-51=0$.

90—97. Определить (по способу Феррари) корни следующих уравнений 4-ой степени:

90. $x^4+4x^3-7x^2-4x+1=0$.

91. $x^4+4x^3-14x^2-4x+1=0$.

92. $x^4-6x^3+7x^2-6x+1=0$.

93. $x^4+4x^3+x^2+12x+9=0.$

94. $x^4+2x^3+4x+2=0.$ **95.** $x^4+3x^2+4=0.$

96. $x^4-3x^2+9=0.$ **97.** $x^4-6x^2+1=0.$

98—100. Решить по способу Грэффе следующие уравнения:

98. $x^3-x^2+\frac{1}{5}x-\frac{1}{105}=0.$ **99.** $x^3-\frac{7}{6}x^2+\frac{119}{360}x-\frac{149}{6480}=0.$

100. $x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{27}{40}x^2-\frac{57}{560}x+\frac{53}{22400}=0.$

101—102. Решить уравнения:

101. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ a^3 & b^3 & x^3 \end{vmatrix}=0.$ **102.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ a^4 & b^4 & x^4 \end{vmatrix}=0.$

103. При каких значениях k система:

$$x+2y=3, \qquad 2x+5y=k, \qquad x-3y=-2$$

будет совместною?

104. При каких значениях t система:

$$2x-3y-2z=tx, \qquad 4x+y+4z=ty, \qquad 3x-2y+2z=tz$$

допускает решения для x, y, z иные, чем $x=y=z=0$?

ОТДЕЛ II.

Интегрирование функций.

1. $\int\frac{x^4dx}{1-x^2}$ **2.** $\int\frac{x^4+1}{x^2-x+1}dx.$

3. $\int\frac{x^2+x-1}{x^3(x-1)^2}dx.$ **4.** $\int\frac{1+x^4}{x^2(1-x^4)}dx.$

5. $\int\frac{1-2x^3}{x^2(1+x^3)}dx.$ **6.** $\int\frac{dx}{3x^4-7x^3+4x}.$

7. $\int\frac{dx}{1+x^3}.$ **8.** $\int\frac{xdx}{1+x^4}.$

9. $\int\frac{dx}{x^4-6x^2+1}.$ **10.** $\int\frac{dx}{x^4+6x^3+11x^2+6x}.$

11. $\int\frac{x^2+6x+7}{x^3+5x^2+9x+5}\,dx.$

12. $\int\frac{(2x+3)dx}{x^3+x^2-2}.$

13. $\int\frac{x^2dx}{x^4+2x^2-3}.$

14. $\int\frac{dx}{1+x^4}.$

15. $\int\frac{1-x^2}{x^4+3x^2+4}\,dx.$

16. $\int\frac{2x^3+x^2-2x+1}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx.$

17. $\int\frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}\,dx.$

18. $\int\frac{4x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}\,dx.$

19. $\int\frac{x^3-2x^2-3x+7}{x^4-3x^3-7x^2+27x-18}\,dx.$

20. $\int\frac{x^2dx}{x^4-3x^2+9}.$

21. $\int\frac{x-2}{(x-1)^2(x^2-4x+5)}\,dx.$

22. $\int\frac{x^2+x+2}{(x+1)^2(x^2+2x+3)}\,dx.$

23. $\int\frac{x^2+3x-2}{(x-1)^2(x^2-x+1)^2}\,dx.$

24. $\int\frac{dx}{1+x^6}.$

25. $\int\frac{dx}{1-x^8}.$

26. $\int\frac{xdx}{(x^2-x+1)^2}.$

27. $\int\frac{x^2-1}{(2x-1)^8}\,dx.$

28. $\int\frac{x^3-1}{(x+2)^5}\,dx.$

29. $\int\frac{dx}{(x+1)^4(x-2)^3}.$

30. $\int\frac{dx}{(2x+3)^2(3x-2)^3}.$

31. $\int\frac{dx}{x^3(x-1)^6}.$

32. $\int\frac{dx}{(x^2-3x+2)^4}.$

33. $\int\frac{x^2dx}{1+x^3}.$

34. $\int\frac{2x^2-x^5}{1+x^6}\,dx.$

35. $\int\frac{2x^3-1}{x(x^3+1)}\,dx.$

36. $\int\frac{dx}{x(1-x^3)^2}.$

37. $\int\frac{dx}{x^3(x^2+1)^2}.$

38. $\int\frac{x(1+2x^2)}{1+x^4}\,dx.$

39. $\int\frac{x^5dx}{x^{12}+1}.$

40. $\int\frac{x^5dx}{x^8-1}.$

41. $\int\frac{x^3dx}{x^6+1}.$

42. $\int\frac{x^3dx}{x^8+1}.$

43. $\int\frac{xdx}{x^6-1}.$

44. $\int\frac{dx}{x(1+x^5)}.$

45. $\int \frac{x\,dx}{x^4+x^2+1}$.

46. $\int \frac{x^2dx}{x^6-1}$.

47. $\int \frac{dx}{x^3(x^2-2)}$.

48. $\int \frac{x^3dx}{x^4-3x^2+9}$.

49. $\int \frac{dx}{x^3(x^4+1)}$.

50. $\int \frac{dx}{x^4(x^6+1)}$.

51. $\int \frac{dx}{x^5(1+x^8)}$.

52. $\int \frac{x^7dx}{(1+x^4)^2}$.

53. $\int \frac{x^{11}dx}{(x^6+1)^3}$.

54. $\int \frac{dx}{x(1+x^4)^2}$.

55. $\int \frac{x^2dx}{x^6-x^3+1}$.

56. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^4-x^2+1}$.

57. $\int \frac{x^2dx}{(x^2-3)^3}$.

58. $\int \frac{x^4dx}{(x^2+2)^3}$.

59. $\int \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^3}dx$.

60. $\int \frac{x^{10}dx}{(1+x^3)^4}$.

61. $\int \frac{x^4dx}{(1+x^2)^3}$.

62. $\int \frac{x^{12}dx}{(x^6+1)^3}$.

63. $\int \frac{x^3dx}{(x^3+1)^2}$.

64. $\int \frac{x^4dx}{(x^4-1)^2}$.

65. $\int \frac{x^4dx}{(x^2+1)^2}$.

66. $\int \frac{(x^2-1)dx}{(2x^2-1)^2}$.

67. $\int \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}dx$.

68. $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+x^2+1}$.

69. $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^3+1}$.

70. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+3x^2+1}$.

71. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^6-5x^4-5x^2+1}$.

72. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^4-x^2+1}$.

73. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^6-1}$.

74. $\int \frac{(x^4+1)\,dx}{x^6+1}$.

75. $\int \frac{(x^2+1)\,dx.}{x^4+3x^3-3x-1}$.

76. $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3-1}$.

77. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+1}$.

78. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+1}$.

79. $\int \frac{x(x-1)\,dx}{x^5+1}$.

80. $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x^4+5x^2+1}$.

81. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4+5x^2+1}$.

82. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x(x^2-x-1)}$.

83. $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2 x^{3/2}}\,dx$.

84. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4+1}}$.

85. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[5]{x^2+2}}$.

86. $\int \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}$.

87. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}-2}$.

88. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x}}$

89. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

90. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^5}}$.

91. $\int \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$.

92. $\int \sqrt[4]{\frac{2-x}{1-x}}\,dx$.

93. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(x-1)^5}}$.

94. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^7}}$.

95. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x(x-1)}}$.

96. $\int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{3/2} dx$.

97. $\int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x-\sqrt{x+1}}\,dx$.

98. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}$.

99. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

100. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-x^2}}$.

101. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$.

102. $\int x(3x^2+2a^2)\sqrt{x^2+a^2}\,dx$.

103. $\int \frac{dx.}{\sqrt{6-x-x^2}}$.

104. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+6x-9x^2}}$.

105. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$.

106. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+7x-1}}$.

107. $\int \sqrt{x^2+a}\,dx$.

108. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

109. $\int \frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$

110. $\int \frac{3x^3+3x^2+8x-4}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx.$

111. $\int \frac{1+4x-5x^2-6x^3}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx.$

112. $\int \sqrt{2x^2-x+3}\,dx.$

113. $\int (x+1)\sqrt{2-x-x^2}\,dx.$

114. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$

115. $\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-3x+2}}.$

116. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}}.$

117. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+x+1}}.$

118. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+3x+2}}.$

119. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-4)\sqrt{x^2+x+1}}.$

120. $\int \frac{dx}{(x^3-x)\sqrt{x^2+x}}.$

121. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}.$

122. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

123. $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)\sqrt{3-x^2}}.$

124. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2\sqrt{1+x^2}}.$

125. $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+1)^{5/2}}.$

126. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{(x^2-x+1)^{3/2}}.$

127. $\int \frac{(1-x)\,dx}{(1-x-x^2)^{3/2}}.$

128. $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+2x-1)^{3/2}}.$

129. $\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{5/2}}.$

130. $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x^2+x+1)^{5/2}}.$

131. $\int \frac{dx}{(x^4-1)\sqrt{x^2+1}}.$

132. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2+x+1}}.$

133. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2\sqrt{1-x^2}}.$

134. $\int \frac{dx}{(x^2+x-3)\sqrt{x^2+x+2}}.$

135. $\int \frac{(2x-1)\,dx}{(x^2-x+2)\sqrt{2x^2-2x+1}}.$

136. $\int \frac{(x^2+2)\,dx}{(x^3+1)\sqrt{x^2-x+2}}.$

137. $\int \frac{(x-3)\,dx}{(2x^2+6x+1)\sqrt{3x^2+8x+2}}.$

138. $\int \frac{(3x+2)\,dx}{(4x^2+5x+4)\sqrt{3x^2-4x+3}}.$

139. $\int \frac{(2x-3)\,dx}{(2x^2-3x+2)\sqrt{x^2+x+1}}.$

140. $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^3}}.$

141. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

142. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-x^3}}$.

143. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

144. $\int \frac{dx}{(x^3+1)\sqrt[3]{1-x^3}}$.

145. $\int \frac{dx}{(x^4-1)\sqrt[4]{x^4+2}}$.

146. $\int \frac{dx}{(x^4+5)\sqrt[4]{x^4+1}}$.

147. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

148. $\int \frac{dx}{x^5\sqrt[5]{1+x^5}}$.

149. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^3-1}}$.

150. $\int \frac{dx}{x^6\sqrt[6]{2x^6+1}}$.

151. $\int (3-2x^3)^{2/3}\, dx$.

152. $\int x^2\sqrt[4]{1+x^4}\, dx$.

153. $\int x(1-x^{2/3})^{3/2}\, dx$.

154. $\int x^3\sqrt[4]{1+x^4}\, dx$.

155. $\int x^2(1+x^{3/4})^{1/3}\, dx$.

156. $\int (1+x^6)^{-7/6}\, dx$.

157. $\int (1-x+x^2)^{5/2}\, dx$.

158. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2+x^4}}$.

159. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2+x^4}}$.

160. $\int (x+\sqrt{1+x^2})^{3/2}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

161. $\int \frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}$.

162. $\int \frac{(x^2-1)\, dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4-x^2+1}}$.

163. $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\, dx$.

164. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\cdot\frac{x dx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

165. $\int \frac{(x^6-1)\, x dx}{(x^2+1)^2(x^4-x^2+1)^{3/2}}$.

166. $\int \frac{x^3-1}{x^3+1}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$.

167. $\int \frac{(x^2-1)\, dx}{x\sqrt{x(x^2-x+1)}}$.

168. $\int \frac{(x^2+1)\, dx}{x\sqrt{x(x^2+x-1)}}$.

169. $\int \frac{3x^2+5x^6}{\sqrt{1+x^4}}\, dx$.

170. $\int \frac{3x^4+1}{\sqrt{1+x^4}}\, dx$.

171. $\int e^{2x}x^3 dx$.

172. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{2^x}}(x^2-1)\, dx$.

173. $\int e^{-x}\cos 3x\,dx$.

174. $\int \frac{\cos x - 3\sin x}{\sqrt{3^x}}\,dx$.

175. $\int e^{-x}x^2\cos 2x\,dx$.

176. $\int e^{2x}x\sin^3 x\,dx$.

177. $\int (x^3 - x)\cos 3x\,dx$

178. $\int \sin x\sin 2x\cos 3x\,dx$.

179. $\int x\sin 2x\cos 4x\,dx$.

180. $\int \frac{dx}{2 - 3\sin x + \cos x}$.

181. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx$.

182. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$.

183. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x}\,dx$.

184. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^8 x}\,dx$.

185. $\int \frac{dx}{\sin^4 x\cos^6 x}$.

186. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

187. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

188. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$.

189. $\int \frac{dx}{\cos^8 x}$.

190. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

191. $\int \sin^5 x\,dx$.

192. $\int \sin^6 x\,dx$.

193. $\int \cos^7 x\,dx$.

194. $\int \cos^4 x\,dx$.

195. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^5 x}$.

196. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx$.

197. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^4 x}$.

198. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$.

199. $\int \frac{\sin^4 x\,dx}{\cos^2 x}$.

200. $\int \frac{\sin^6 x\,dx}{\cos^3 x}$.

201. $\int \sin^8 x\cos^5 x\,dx$.

202. $\int \sin^3 x\cos^7 x\,dx$.

203. $\int \sin^8 x\cos^4 x\,dx$.

204. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos x}}$.

205. $\int \sqrt{\sin^2 x\cos x}\,dx$.

206. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x\cos^4 x}}$.

207. $\int \sqrt{\sin^3 x\cos x}\,dx$.

208. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin x\cos^7 x}}$.

209. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}$.

210. $\int \mathrm{tg}^5 x dx$.

211. $\int \cot^4 x\, dx$

212. $\int \frac{dx}{\sqrt{\mathrm{tg} x}}$.

213. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\mathrm{tg}^2 x}}$.

214. $\int \frac{dx}{2 + 3\cos^2 x}$.

215. $\int \frac{dx}{(3 + \sin^2 x)^2}$.

216. $\int \frac{-1 + 4\sin x \cos x - 2\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$.

217. $\int \frac{dx}{2 - \mathrm{tg} x}$.

218. $\int \frac{dx}{1 + 2\sin x}$.

219. $\int \frac{\sin x\, dx}{(1 - 3\cos x)^3}$.

220. $\int \frac{\sin^2 x\, dx}{(2 + \cos x)^2}$.

221. $\int \frac{dx}{(3 + \sin x)^2}$.

222. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{(2 + 3\sin x)^2}$.

223. $\int \frac{dx}{(1 - 3\sin x + \cos x)^2}$.

224. $\int \frac{2\cos x - \sin x + 1}{(2 + \cos x)^3} dx$.

225. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

226. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.

227. $\int \frac{3\sin x + 5\cos x}{\sin x - 2\cos^3 x} dx$.

228. $\int \frac{dx}{2\cot x - 3\sin x}$.

229. $\int \frac{dx}{\cos x - 2\mathrm{tg} x}$.

230. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin x + 3\cos x}$.

231. $\int \frac{\cos x\, dx}{(1 - e^2\cos^2 x)^{3/2}}$.

232. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin 3x}$.

233. $\int \frac{\cos x\, dx}{(\cos 2x)^{3/2}}$.

234. $\int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$.

235. $\int \frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\cos^2 x(\sin x + \cos x)} dx$.

236. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sin x - \cos x}$.

237. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos x\,(1 - \sin x \cos x)}$.

238. $\int (a\cos^2 x + b\sin^2 x)^k \sin x \cos x dx$.

239. $\int \frac{dx}{\sin 4x}$.

240. $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin 4x}$.

241. $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\cos 4x}$.

242. $\int \frac{dx}{\sin x \sin 3x}$.

243. $\int \frac{dx}{\cos x \cos 3x}$.

244. $\int \frac{\sin x\, dx}{\cos 3x}$.

245. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin 3x}} dx$.

246. $\int \frac{dx}{2^x + 1}$.

247. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}}}$.

248. $\int \sqrt{x} \lg^2 x\, dx$.

249. $\int \frac{2 + 3\lg x + 2\lg^2 x}{x \lg x (1 + \lg x)} dx$.

250. $\int \frac{\lg x \cdot dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

251. $\int \frac{x \lg x\, dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

252. $\int \frac{\lg(x+2)\, dx}{\sqrt{x+1}}$.

253. $\int \frac{\log(x-2)\, dx}{(x+1)^3}$.

254. $\int \frac{(x+1)\lg(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$.

255. $\int \frac{x \log(x-1)\, dx}{(x^2+1)^2}$.

256. $\int \log(x + \sqrt{1+x^2}) dx$.

257. $\int \frac{\log(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

258. $\int \log\left(x + 1 + \sqrt{x^2+2x+3}\right) \frac{dx}{(x+1)^2}$.

259. $\int \frac{\log \operatorname{tg} x\, dx}{\cos^4 x}$.

260. $\int x^3 \arcsin x\, dx$.

261. $\int \arcsin^3 x\, dx$.

262. $\int \frac{\arcsin x\, dx}{(1-x)^2}$.

263. $\int \frac{\arcsin x\, dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

264. $\int \frac{\arcsin x\, dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.

265. $\int \frac{x \cdot \arcsin x\, dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.

266. $\int \frac{x \cdot \arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

267. $\int \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1+x}}$.

268. $\int x\sqrt{1-x^2} \arcsin x\, dx$.

269. $\int \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$.

270. $\int \arcsin \sqrt{x}\, dx$.

271. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x}\, dx$.

272. $\int x^2 \operatorname{arctg} x\, dx$.

273. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{(1+x)^2}$.

274. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

275. $\int \frac{x \cdot \operatorname{arctg} x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

276. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

277. $\int \frac{x\cdot \operatorname{arctg} x\, dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

278. $\int \frac{\operatorname{arctg} x\, dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.

279. $\int \frac{x\cdot \operatorname{arctg} x\, dx}{(1-x^2)^{3/2}}$.

280. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx$.

281. $\int \frac{x\cdot \operatorname{arctg} x\, dx}{(x^2-1)^2}$.

282. $\int e^{\cos^2 x}\sin 2x\, dx$.

283. $\int e^{\sqrt{x}}\cdot \sqrt{x}\, dx$.

284. $\int \frac{2-3x}{x^3}\, e^{-\frac{2}{x}}\, dx$.

285. $\int \frac{dx}{x(\log x-1)}$.

286. $\int \frac{1+\log x}{(x\log x)^2}\, dx$.

287. $\int \frac{\log\operatorname{tg} x\cdot dx}{\sin^2 x}$.

288. $\int \cos x\cdot \log\operatorname{tg} x\, dx$.

289. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\log\sin x\, dx$.

290. $\int \frac{\log\cos x dx}{\cos^2 x}$.

291. $\int \frac{\log\sin x\, dx}{\cos^4 x}$.

292. $\int \frac{e^{-x}(2x+1)}{x\sqrt{x}}dx$.

293. $\int \frac{\sin x\cos x-x}{\sin^2 x}\, dx$.

294. $\int \frac{e^x(\sin x-3\cos x)}{\sin^4 x}\, dx$.

295. $\int \frac{3+2x-\frac{1}{2}x^2-x^3}{x^4}e^{-x}dx$.

296. $\int \frac{(2x^2+x+1)e^x}{(2x+1)^2}\, dx$.

297. $\int \frac{\log x-1}{\log^2 x}\, dx$.

298. $\int \frac{2x\log^2 x}{(1+\log x)^2}\, dx$.

299. $\int \frac{2+\log x}{\log^2 x}\cdot \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

300. $\int \sin(e^x)\,[xe^x-e^{-x}]\, dx$.

301. $\int \frac{1+\sin^2 x}{\sqrt{\sin^3 x}}\, dx$.

302. $\int \frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}\, dx$.

303. $\int \frac{e^{-x^2}(1+2x^2)}{x^2}\, dx$.

304. $\int \frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\, dx$.

305. $\int \frac{\log x\, dx}{\sqrt{1-x}}$.

306. $\int \frac{x\log x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

307. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

308. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^3 x}$.

309. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^6 x}$.

310. $\int \frac{dx}{2+3\operatorname{sh}^2 x}$.

311. $\int \mathrm{sh}2x \cos 3x \, dx.$

312. $\int x \,\mathrm{sh}2x \cos x dx.$

313. $\int x^2 \mathrm{ch}3x \, dx.$

314. $\int x \cdot \mathrm{arcth} x \, dx.$

315. $\int x \cdot \mathrm{arcsh} x \, dx.$

316. $\int \frac{\log \mathrm{sh} x}{\mathrm{ch}^2 x} dx.$

317. $\int \mathrm{sh} x \cdot \log \mathrm{th} x \, dx.$

318. $\int \frac{\mathrm{sh}^2 x \, dx.}{(2 + \mathrm{ch} x)^2}.$

Проинтегрировать полные дифференциалы:

319. $$\left[\sqrt{1-y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{y}{x^2+y^2}\right] dx + \left[\sqrt{1-x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{1}{y}\right] dy.$$

320. $$\left[\frac{y}{2\sqrt{1+xy}} + \frac{y}{x^2+y^2} + e^x \sin 2y + \frac{1}{\sin x}\right] dx + \left[\frac{y}{2\sqrt{1+xy}} - \frac{x}{x^2+y^2} + 2\, e^x \cos 2\, y\right] dy.$$

321. $$\left[\sqrt{1-y^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\right] dx + \left[\frac{-xy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{y}{(x+\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right] dy.$$

322. $$\left[\frac{1}{2\sqrt{xy}} + \frac{1}{x-2y} + \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x(1-xy)}} - \frac{1}{x^2}\right] dx + \left[\frac{-\sqrt{x}}{2\,y\sqrt{y}} - \frac{2}{x-2y} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y(1-xy)}} + \frac{1}{(y^2+1)^{3/2}}\right] dy.$$

323. $$\left[\frac{2x}{x^2+y^2} + 2x\sqrt{1+y} - \frac{y}{1+x^2y^2} + \lg x\right] dx + \left[\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+y}} - \frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{1}{y\sqrt{1+y^2}}\right] dy.$$

324. $$\left[\frac{x+1}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{y^2z^2-x^2}}\right] dx + \left[\frac{y+1}{y} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x}{y\sqrt{y^2z^2-x^2}}\right] dy + \left[\frac{z+1}{z} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{x}{z\sqrt{y^2z^2-x^2}}\right] dz.$$

325. $$\left[\frac{1}{x+3y-4z}+\frac{x+\frac{1}{2}z}{\sqrt{x^2+xz+z^2}}+1\right]dx+\left[\frac{3}{x+3y-4z}+\frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{y}(1+yz)}+\frac{1}{(y^2+1)^{3/2}}\right]dy+\left[\frac{-4}{x+3y-4z}+\frac{\frac{1}{2}x+z}{\sqrt{x^2+xz+z^2}}+\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{z}(1+yz)}-1\right]dz.$$

326. $$\left[\frac{yz}{1+(xyz)^2}+\frac{2x}{x^2+z^2}+2x\right]dx+\left[\frac{xz}{1+(xyz)^2}-\frac{1}{2\sqrt{yz}}-1\right]dy+\left[\frac{xy}{1+(xyz)^2}+\frac{2z}{x^2+z^2}+\frac{\sqrt{y}}{2z\sqrt{z}}+1\right]dz.$$

327. $$\left[\frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}(1+xyz)}-\frac{2z}{x^2-z^2}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}\right]dx+\left[\frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}(1+xyz)}-\frac{z}{(y-z)\sqrt{y^2-z^2}}+\frac{y}{\cos^2 y}\right]dy+\left[\frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}(1+xyz)}+\frac{2x}{x^2-z^2}+\frac{y}{(y-z)\sqrt{y^2-z^2}}+\frac{1}{z\log z}\right]dz.$$

328. $$\left[\frac{2x}{x^2+y^2-z^2}+\frac{z}{(x+z)\sqrt{x^2-z^2}}+\frac{\log x}{x}\right]dx+\left[\frac{2y}{x^2+y^2-z^2}+\frac{1}{\sqrt{z^2-y^2}}+\frac{1}{y^2\sqrt{1+y^2}}\right]dy+\left[\frac{-2z}{x^2+y^2-z^2}\frac{x}{(x+z)\sqrt{x^2-z^2}}-\frac{y}{z\sqrt{z^2-y^2}}+\frac{\cos z}{\sqrt{\sin z}}\right]dz.$$

Найти функцию $u(x, y, z)$ по следующим условиям:

329. $du=\left(2xyz+\frac{1}{z}\right)dx+\left(x^2z-\frac{1}{z^2}\right)dy+\left(x^2y-\frac{x}{z^2}+\frac{2y}{z^3}\right)dz$, $u(1, 1, 1)=1$.

330. $du=(2xy+z^2+yz)\,dx+(x^2+2yz+xz)\,dy+(y^2+2zx+xy)\,dz$, $u(0, 0, 0)=0$.

21522 1538 Академическая Библиотека СП.-Б.-М.-Л. имени И. Рабинович

ОТДЕЛ III.

Геометрические приложения дифференциального исчисления.

В задачах n° 1—30 введены для краткости следующие обозначения (в прямоугольной системе координат):

S_t—подкасательная; S_n—поднормаль;

T—длина касательной; N—длина нормали;

X_t, Y_t—отрезки, отсекаемые касательною на осях абсцисс и ординат;

L_t—длина отрезка касательной, заключенного между осями координат;

P_t—длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную;

X_n, Y_n—отрезки, отсекаемые нормалью на осях абсцисс и ординат;

L_n—длина отрезка нормали, заключенного между осями координат;

P_n—длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на нормаль.

Знак $|l|$ означает длину отрезка l.

Имея в виду указанные обозначения, **доказать для кривых n° 1—30 следующие свойства:**

1. $x = a\left(\cos t + \log\ \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right),\ y = a\sin t \ldots T = a.$

2. $x = x_0 + a\ (\log\sin t - \sin^2 t),$

$$y = a\sin t\cos t \ldots N^2 + T^2 = a^2,\ N\cdot T = ay.$$

3. $x = x_0 + a\left[\frac{\cos t}{2\sin^2 t} + \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2}\log\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right],$

$$y = a\left(\frac{1}{\sin t}+\frac{1}{\cos t}\right) \ldots N + T = \frac{y^2}{a}.$$

4. $x = a\ (\sin t + \cos t),\ y = y_0 + a\left[\sin t - \cos t - \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)\right] \ldots$

$$\frac{1}{T}+\frac{1}{N} = \frac{x}{ay}.$$

Академическая Библиотека — и — Имени Н. ...

5. $x = x_0 + \frac{a}{3} \cdot \frac{1-3\sin^2 t}{(\sin t)^{3/2}}$, $y = \frac{a\cos t}{\sqrt{\sin t}}$ . . . $N \cdot S_n = a^2$.

6. $x = \frac{a}{\sin^2 t} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cot^2 t}$, $y = a \cot t \cdot e^{-\frac{1}{2}\cot^2 t}$ . . . $N \cdot T = x \cdot y$,

$N^2 + T^2 = x^2$.

7. $x = x_0 + a\left[\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) - \log \operatorname{tg} t\right]$,

$y = a \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)$ . . . $N + S_n = a$.

8. $x = x_0 + \frac{a}{2}(2t + \sin 2t)$, $y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2t)$ . . . $N \cdot T = a \cdot S_n$.

9. $x = x_0 + a\left(-\sin t + \frac{1}{2\sin^2 t}\right)$, $y = a\ (\cos t + \cot t)$ . . .

$\frac{1}{N} + \frac{1}{S_n} = \frac{1}{a}$.

10. $x = x_0 + a\left(\log \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t - \sin t\right)$, $y = a\ (\sin t + \cos t)$ . . .

$\frac{1}{N} + \frac{1}{T} = \frac{1}{a}$.

11. $x = a\ (1 - \sin t)$, $y = a \cos t$ . . . $L_n = |S_t| + |S_n|$,

$X_n \cdot Y_n = N \cdot T$.

12. $x = a\cos t + (b + at)\sin t$, $y = a \sin t - (b + at)\ \cos t$ . . . $P_n = a$,

$\frac{1}{X_n^2} + \frac{1}{Y_n^2} = \frac{1}{a^2}$.

13. $x = a + b \sin t$, $y = a - b \cos t$ . . $\frac{1}{X_n} + \frac{1}{Y_n} = \frac{1}{a}$.

14. $x = a \sin t$, $y = -a\cos t$ . . $\frac{1}{X_t^2} + \frac{1}{Y_t^2} = \frac{1}{a^2}$, $P_t = a$.

15. $x = \frac{a(\cos t - \sin t)}{\sqrt{1 - \sin t \cos t}} \cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} t - 1}{\sqrt{3}}}$,

$y = x \cdot \frac{\cos t}{\cos t - \sin t}$ . . . $L_n = T$.

16. $x = \frac{a}{\sqrt{\sin t - \cos^2 t}} \cdot \left(\frac{2\sin t + 1 - \sqrt{5}}{2\sin t + 1 + \sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{5}}}$,

$y = x\cos t$ . . . $N = x$, $S_n \cdot T = xy$.

17. $x = \frac{a}{\sin\frac{t}{2}\sqrt{\sin t}} \cdot e^{-\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}}$, $y = x\sin t$ . . . $T = x$.

18. $x = \frac{a}{1 - \sin t \cos t} \cdot e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg} t - 1}{\sqrt{3}}}$, $y = x\sin^2 t$ . . . $T^2 = xy$.

19. $x = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t} \cdot y$, $y = ae^t \cdot \sqrt{\cos 2t \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}$ . . .

$L_t = L_n$, $P_t = P_n$.

20. $x = a\sin t$, $y = a\ (1 - \cos t)$ . . . $P_n = x$, $P_t = y$,

21. $x = b\sin t$, $y = a - b\cos t$ . . . $P_n \cdot N = a \cdot S_n$.

22. $x = (a - b)\sin t - \frac{1}{2}a\sin^3 t$, $y = b\cos t + \frac{1}{2}a\sin^2 t\cos t$ . . .

$L_n = a$.

23. $y = ae^{-\frac{x}{y}}$ . . . $L_t = N$.

24. $bx = a^2 e^{\frac{y^2}{2a^2}}$ . . . $P_t \cdot N = a^2 - y^2$.

25. $(y - 2x)^2 = a\ (y - x)$ . . . $S_n = 3y - 2x$.

26. $xy = a^2$ . . . $X_t \cdot Y_t = 4a^2$, L_t делится в точке (x, y) пополам.

27. $x^\lambda + y^\lambda = a^\lambda$, $\lambda = \frac{k}{k+1}$ . . . $X_t^k + Y_t^k = a^k$.

28. $x^2 - y^2 = a^2$ . . . $S_n = x$, $x \cdot T = y \cdot N$, L_n делится точкою (x,y) пополам.

29. $x^n y^m = a^{n+m}$ . . . L_t делится в отношении m : n точкою кас. (x,y).

30. $y^2 + 16px = 0$ . . . L_t делится пополам параболой $y^2 = 2px$.

В задачах 31—40 введены следующие обозначения (в полярной системе координат):

S_t — полярная подкасательная S_n — пол. поднормаль, T — полярная длина касательной, N — пол. длина нормали, P_t — длина перпендикуляра, опущенного из полюса на касательную, P_n — длина перпендикуляра, опущенного из полюса на нормаль. Имея в виду эти обозначения, **доказать для кривых 31—40 следующие свойства**:

31 $r = a\cos u,\ \theta = \theta_0 + u - \operatorname{tg} u\ \ .\ .\ .\ T = a,\ S_t = \sqrt{a^2 - r^2}.$

32. $r = a\sin u\cos u,\ \theta = \theta_0 + 2u - \operatorname{tg} u\ \ .\ .\ .\ N^2 + T^2 = a^2,$

$|S_n| + |S_t| = a.$

33. $r = \dfrac{a\sin u\cos u}{\sin u + \cos u}, \theta = \theta_0 + u - \operatorname{tg} u + \log\ (1 + \operatorname{tg} u)\ \ .\ .\ .$

$N + T = a.$

34. $r = a\sqrt{\sin u\cos u},\ \theta = \theta_0 + u - \frac{1}{2}\operatorname{tg} u\ \ .\ .\ .\ N\cdot T = a^2.$

35. $r = a\ (\sin u + \cos u),\ \theta = \theta_0 + u - \log\ (1 + \operatorname{tg} u)\ \ .\ .\ .$

$\dfrac{1}{N} + \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{a}.$

36. $r = \dfrac{a}{\cos u},\ \theta = \theta_0 - u + \operatorname{tg} u\ \ .\ .\ .\ T = \dfrac{r^2}{a}.$

37. $r = a\ \sqrt{\cos u},\ \ \theta = \theta_0 + \dfrac{1}{2}\ (u - \operatorname{tg} u)\ \ .\ .\ .\ N\cdot S_t = a^2.$

38. $r = a\sin\ \ (\theta - \theta_0)\ \ .\ .\ .\ N = a,\ P_t = \dfrac{r^2}{a}.$

39. $r^2 = \dfrac{a^2}{\sin 2\,(\theta - \theta_0)}\ \ .\ .\ .\ N = \dfrac{r^3}{a^2}.$

40. $r^2 = a^2\sin\ 2(\theta - \theta_0)\ \ .\ .\ .\ T\cdot S_n = a^2.$

Для кривых, приведенных в задачах 41—49, требуется **доказать, что длина дуги между любыми двумя точками равна разности двух значений некоторой функции координат,**—значений, отвечающих концу и началу дуги, что для краткости обозначено следующим образом: $s_1 - s_0 = [f(x,y)]_0^1.$

41. $x = x_0 + \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{\cos t}{\sin^2 t} + \log\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right],\ \ y = \dfrac{a}{2\sin t}\ \ .\ .\ .$

$s_1 - s_0 = \left(\dfrac{y^2}{a}\right)_0^1.$

42. $x = x_0 + a\left[\log\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} + \cos t\right],\ y = a\sin t\ \ .\ .\ .$

$s_1 - s_0 = \left(a\ \log\dfrac{y}{a}\right)_0^1.$

43. $x = x_0 + \frac{a}{8}(2t + \sin 2t),\ y = \frac{a}{8}(1 - \cos 2t)\ \ldots$

$s_1 - s_0 = \sqrt{ay})_0^1$.

44. $y = a\ \mathrm{ch}\frac{x - x_0}{a}\ \ldots\ s_1 - s_0 = \left(\frac{y^2}{T}\right)_0^1$.

45. $\left(y - \frac{4}{9}a\right)^3 = a\ (x - x_0)^2\ \ldots\ s_1 - s_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\ y^{3/2}\right)_0^1$.

46. $r = \frac{a\sin u}{\sqrt{\sin u - \cos u}} e^{\frac{1}{2}u},\ \theta = \theta_0 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\log\ (\sin u - \cos u)\ \ldots$

$s_1 - s_0 = (N)_0^1$.

47. $r = a\sqrt{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)} \cdot e^{\frac{1 + \sin u}{2\cos^2 u}},\ \theta = \theta_0 + \frac{1 + \sin u}{3\cos^3 u} - \frac{1}{3}\mathrm{tg} u\ \ldots$

$s_1 - s_0 = (S_t)_0^1$.

48. $r = \frac{a}{\sqrt{1 - \sin u \cos u}} e^{\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg} u - 1}{\sqrt{3}}}$,

$\theta = \theta_0 - u + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2\mathrm{tg} u - 1}{\sqrt{3}}\ \ldots\ s_1 - s_0 = (P_t)_0^1$.

49. $r = ae^{m\theta}\ \ldots\ s_1 - s_0 = (T)_0^1$.

В задачах 50—63 **доказать ортогональность следующих систем кривых** при произвольных параметрах a и b, т. е. доказать, что каждая кривая одной системы пересекает каждую кривую другой системы под прямым углом:

50. $y^2 + 2ax = a^2,\ y^2 - 2bx = b^2;\ (a > 0,\ b > 0)$.

51. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,\ \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1$; (*с постоянное*, $a > c > b$).

52. $xy = a^2,\ x^2 - y^2 = b^2$.

53. $x^2 + y^2 - 2ay = 0,\ x^2 + y^2 - 2bx = 0$.

54. $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = a^2,\ y^2 = 2bx$.

55. $x^2 - \frac{1}{3}y^2 = a^2,\ xy^3 = b^4$.

56. $x^k + y^k = a^k,\ \frac{1}{x^{k-2}} - \frac{1}{y^{k-2}} = \frac{1}{b^{k-2}}$.

57. $x^3 = ay^2$, $2x^2 + 3y^2 = b^2$.

58. $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $(x^2+y^2)^2 = b^2xy$.

59. $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = a^4$, $x^3y - xy^3 = b^4$.

60. $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 = a^5$, $5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 = b^5$.

61. $(x^2+y^2)^3 = a^3(x^3 - 3xy^2)$, $(x^2+y^2)^3 = b^3(3x^2y - y^3)$.

62. $\cos y = ae^{-x}$, $\sin y = be^{-x}$.

63. $r^k = a^k \sin k\theta$, $r^k = b\cos k\theta$.

64. Доказать, что кривые $r^k = a^k \sin k\theta$ и $r^k = b^k \sin(k\theta + \omega)$ пересекаются под углом ω.

Найти параллельные кривые для следующих кривых:

65. $y^2 = 2px$.

66. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

67. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

68. $r = a(1 + \cos\theta)$.

Найти подэры следующих кривых в прямоугольных координатах (подэрою данной кривой относительно точки (x_0, y_0) называется общее место оснований перпендикуляров, опущенных из точки (x_0, y_0) на все касательные данной кривой):

69. $y^2 = 2px$ относит. $(0,0)$.

70. $y^2 = 2px$ относ. $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

71. $xy = a^2$ отн. $(0,0)$

72. $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ отн. $(0,0)$.

73. $x^3 = a^2y$ отн. $(0,0)$.

74. $x = -a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ отн. $(0,0)$.

75. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ относ. $(0,0)$.

Найти подэры следующих кривых (в полярных координатах) относительно полюса:

76. $r^2 = a^2\cos 2\theta$.

77. $r = 2a\cos\theta$.

78. $r = a(1 + \cos\theta)$.

79. $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\theta}$.

80. $r = \frac{a}{1 + \cos\theta}$.

81. $r^k = a^k \cos k\theta$.

82. $r = a\theta$.

83. $r = ae^{m\theta}$.

84. $r = a(\sin\theta + \cos\theta)$.

Найти радиусы кривизны следующих кривых;

85. $x = a\cos t + (b + at)\sin t$, $y = a\sin t - (b + at)\cos t$.

86. $x = a[(n+1)\cos t - \cos(n+1)t]$, $y = a[(n+1)\sin t - \sin(n+1)t]$.

87. $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$

88. $x = 3a\sin^5 t,\ y = a\cos t(3\cos^4 t - 10\cos^2 t + 15).$

89. $x = a[\sin t\cos t(2\cos^2 t + 3) + 3t],\ y = 2a\cos^4 t.$

90. $x = a\sin^3 t,\ y = a\cos t(3 - \cos^2 t).$

91. $x = a[2t\cos t + (t^2 - 2)\sin t],\ y = a[2t\sin t - (t^2 - 2)\cos t].$

92. $x = 3a\left[\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right],\ y = \frac{2a}{\cos^3 t}.$

93. $x = ae^{-t}(\cos t - \sin t),\ y = ae^{-t}(\cos t + \sin t).$

94. $x = x_0 + 4a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right),\ y = a(1 + t^2)^2.$

95. $x = x_0 + ak\int\frac{dt}{\cos^k t},\ y = \frac{a}{\cos^k t}.$

Для кривых 96 – 108 **доказать соотношения между радиусом кривизны** R, координатами точки x, y и отрезками T, N, S_t, S_n (см. в начале III отд.):

96. $x = x_0 + a\log\frac{\sin t}{1 - \sin t},\ y = a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\ \ldots\ R^2 = N^2 + T^2.$

97. $x = a\operatorname{tg}\frac{t}{2},\ y = y_0 + \frac{a}{2}\log\frac{1 + \cos t}{\cos t}\ \ldots\ R^2 y^2 = x^2(N^2 + T^2).$

98. $x = a\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right),$

$$y = y_0 + \frac{a}{2}\left[\frac{1 + \sin t}{\cos^2 t} - \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right]\ \ldots\ R = \frac{xN^2}{y^2}.$$

99. $x = x_0 - \frac{a}{4\cos^2\frac{t}{2}} + \frac{a}{2}\log\operatorname{tg}\frac{t}{2},\ y = a\operatorname{tg}\frac{t}{2}\ \ldots\ R = \frac{T^2}{y}.$

100. $x = a\sin t,\ y = y_0 - a\cos t\ \ldots\ R = \frac{xT}{y}.$

101. $x = x_0 + a\log\operatorname{tg} t,\ y = a\operatorname{tg} t\ \ldots\ R = \frac{NT^2}{y^2}.$

102. $x = \frac{a}{2}\operatorname{tg} t,\ y = y_0 + \frac{a}{4}\operatorname{tg}^2 t\ \ldots\ R = \frac{xTN^2}{y^3}.$

103. $x = x_0 + a\left(\cos t + \log \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ . . . $R = \frac{yT}{S_n}$.

104. $x = x_0 + \frac{k}{4}(1 - \cos 2t)$, $y = y_0 + \frac{k}{4}(2t - \sin 2t)$. . $R = k \cdot \frac{y}{T}$.

105. $x = x_0 - \frac{1}{2} k\cot^2 t$, $y = y_0 - k\cot t$ . . . $R = k \cdot \left(\frac{N}{S_n}\right)^3$.

106. $x = x_0 - k\cos t$,

$$y = y_0 + k\left[\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) - \sin t\right] \ . \ . \ . \ R = k \cdot \frac{S_n}{y}.$$

107. $x = x_0 + kt$, $y = y_0 - k\log\cos t$ . . . $R = k \cdot \frac{N}{y}$.

108. $x = x_0 + k\log \sin t$, $y = y_0 + kt$ . . . $R = k \cdot \frac{T}{y}$.

В задачах 109—118 **доказать** для кривых **соотношения между радиусом кривизны** R **и длиною дуги** s, отсчитываемой от начала координат $(t = 0)$:

109. $x = 2a\,(t\sin t + \cos t - 1)$,

$$y = 2a\,(\sin t - t\cos t) \ . \ . \ . \ R = 2\sqrt{as}.$$

110. $x = 3a\,(t^2\sin t + 2t\cos t - 2\sin t)$,

$$y = 3a\,(-t^2\cos t + 2t\sin t + 2\cos t - 2) \ . \ . \ . \ R = 3\sqrt[3]{as^2}.$$

111. $x = at$, $y = a\log\sec t$ . . . $R = a\operatorname{ch}\frac{s}{a}$.

112. $x = \frac{a}{\sqrt{2}} \log \frac{1 + \sqrt{2}\sin t}{1 - \sqrt{2}\sin t}$,

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} \log\left(\frac{\sqrt{2}\cos t + 1}{\sqrt{2}\cos t - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\right) \ . \ . \ . \ R = 2a\operatorname{ch}\frac{s}{a}.$$

113. $x = a\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)$, $y = a\,(\sec t - 1)$ . . . $R = \frac{a^2 + s^2}{a}$.

114. $a = \frac{a}{4}(2t + \sin 2t)$, $y = \frac{a}{4}(1 - \cos 2t)$ . . . $R = \sqrt{a^2 - s^2}$.

115. $x = a\,(1 - \cos t)$,

$$y = a\left[\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) - \sin t\right] \ . \ . \ . \ R = a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}} - 1}.$$

116. $x = \frac{a}{2} e^t (\sin t + \cos t - 1)$,

$y = \frac{a}{2} e^t (\sin t - \cos t + 1) \ldots R = a + s.$

117. $x = \frac{a}{2} (\operatorname{sh} t \cos t + \operatorname{ch} t \sin t)$,

$y = \frac{a}{2} (\operatorname{sh} t \sin t - \operatorname{ch} t \cos t + 1) \ldots R = \sqrt{a^2 + s^2}.$

118. $x = \frac{a}{3} (1 - \cos^3 t)$, $y = \frac{a}{3} \sin^3 t \ldots R = \sqrt{2as - 4s^2}.$

В задачах 119—132 **доказать** для кривых, заданных в **полярных координатах, соотношения между радиусом кривизны** R, **радиусом-вектором** r **и отрезками** S_t, S_n, T, N, P_t, P_n (см. объяснения после примера 30).

119. $r = a \sec u$, $\theta = \theta_0 + \operatorname{tg} u - u \ldots R = P_t.$

120. $r = a \operatorname{tg} \frac{u}{2}$, $\theta = \theta_0 + \log \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \ldots R = \frac{(a^2 + r^2)^2}{4a^3}.$

121. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos u - \sin u}} e^{\frac{1}{2} u}$,

$\theta = \theta_0 - \frac{1}{2} \log (\cos u - \sin u) - \frac{1}{2} u \ldots R = T.$

122. $r = \frac{a}{\sin \frac{u}{2} \sqrt{\sin u}} e^{-\frac{1}{4 \sin^2 \frac{u}{2}}}$, $\theta = \theta_0 - u - \cot \frac{u}{2} \ldots R = S_n.$

123. $r = \frac{a}{\sqrt{1 + \sin u \cos u}} e^{-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} u + 1}{\sqrt{3}}}$,

$\theta = \theta_0 - u + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} u + 1}{\sqrt{3}} \ldots R = P_n.$

124. $r = a \sqrt{\operatorname{tg} \frac{u}{2} e^{\frac{1}{4 \sin^2 \frac{u}{2}}}}$,

$\theta = \theta_0 + \cot \frac{u}{2} \ldots R^2 = T^2 + N^2$, $R = |S_n| + |S_t|.$

125. $r = a\cot u \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)$, $\theta = \theta_0 - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{u}{2}\right)$. . $R = \frac{N^2}{r}$.

126. $r = a\cot u$, $\theta = \theta_0 - \operatorname{tg} u$ . . . $R = \frac{N^3}{r^2}$.

127. $r = \frac{a}{\sin u}\sqrt{\sin u - \cos u} \cdot e^{-\frac{1}{2}u}$,

$\theta = \theta_0 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\log(\sin u - \cos u)$ . . . . $R = \frac{NS_n}{r}$.

128. $r = \frac{a}{1 - \sin u}$, $\theta = \theta_0 - u + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)$. . . $R = r$.

129. $r = ae^u$, $\theta = \theta_0 - \log\cos u$. . . $\frac{1}{R} = \frac{1}{T} + \frac{1}{N}$.

130. $r^{k-1} = a^{k-1}\sin(k-1)(\theta - \theta_0)$. . . $R = \frac{1}{k}N$.

131. $r = a(1 + \cos\theta)$. . . $R = \frac{2}{3}N = \frac{2}{3}\sqrt{2ar}$.

132. $r^2 = a^2\cos 2\theta$. . . $R = \frac{1}{3}N = \frac{a^2}{3r}$.

Найти эволюты следующих кривых:

133. $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

134. $x = a(3\cos t - \cos 3t)$, $y = a(3\sin t - \sin 3t)$.

135. $x = -a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

136. $x = \frac{1}{2}p\cot^2 t - k\sin t$, $y = p\cot t + k\cos t$.

137. $x = a\cos t + (b + at)\sin t$, $y = a\sin t - (b + at)\cos t$.

138. $x = ae^{-t}(\cos t - \sin t)$, $y = ae^{-t}(\cos t + \sin t)$.

139. $x = a[2t\cos t + (t^2 - 2)\sin t]$, $y = a[2t\sin t - (t^2 - 2)\cos t]$.

140. $x = 3a\left[\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\right]$, $y = \frac{2a}{\cos^3 t}$.

141. $x = 4a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right)$, $y = a(1 + t^2)^2$.

142. $x = a(t + \sin t) + b\sin\frac{t}{2}$, $y = a(3 + \cos t) + b\cos\frac{t}{2}$.

143. $x = -a \sin t - \frac{p}{2} \sin t \cdot \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right),$

$$y = a \cos t - \frac{p}{2} \operatorname{tg} t + \frac{p}{2} \cos t \cdot \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right).$$

144. $x = \cos t \left(b + \frac{1}{2} a \sin^2 t\right),\ y = \sin t \left(a - b - \frac{1}{2} a \sin^2 t\right).$

145. $x = t - b \operatorname{th} \frac{t}{a},\ y = a \operatorname{ch} \frac{t}{a} + \frac{b}{\operatorname{ch} \frac{t}{a}}.$

146. $x = t + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^4 + t^4}},\ y = \frac{a^2}{t} + \frac{bt^2}{\sqrt{a^4 + t^4}}.$

147. $x = t - \frac{bt^2}{\sqrt{a^4 + t^4}},\ y = \frac{t^3}{3a^2} + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^4 + t^4}}.$

148. $x = a \cos t + \frac{kb \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}},\ y = b \sin t +$

$$+ \frac{ka \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}.$$

149. $x = a \operatorname{ch} t + \frac{kb \operatorname{ch} t}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t}},\ y = b \operatorname{sh} t -$

$$- \frac{ka \operatorname{sh} t}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t}}.$$

150. $r = a\theta.$ **151.** $r^2 = a^2 \cos 2\theta.$

152. $r = a(1 + \cos\theta).$ **153.** $r^n = a^n \cos n\theta.$

Найти огибающие кривые для следующих систем огибаемых кривых:

154. Окружностей, построенных на главных хордах параболы $y^2 = 2px$, как на диаметрах.

155. Окружностей, построенных на главных хордах эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, как на диаметрах.

156. Окружностей, построенных, как на диаметрах, на хордах окружности $x^2 + y^2 = a^2$, параллельных оси y.

157. Окружностей постоянного радиуса R, центры которых лежат на окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

158. Окружностей, центры которых лежат на данной окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ и которые проходят через начало координат.

159. Поляр параболы $y^2=2px$, если полюсы лежат на параболе $y^2=2qx$ $(q>p)$.

160. Поляр гиперболы $xy=a^2$, если полюсы лежат на гиперболе $xy=b^2$ $(b^2<a^2)$.

161. Поляр эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, если полюсы лежат на эллипсе $\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}=1$.

162. Поляр эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, если из полюсов этот эллипс виден под прямым углом.

163. Хорд, соединяющих концы двух сопряженных диаметров эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

164. Различных положений прямой, которая вращается с постоянною угловою скоростью ω вокруг одной из своих точек, в то время, как эта точка сама движется по прямой (оси x) с постоянною скоростью v.

165. Различных положений прямой, концы которой движутся по сторонам прямого угла с постоянными скоростями v_1, v_2, причем в начальный момент эти концы находятся в расстоянии a_1, a_2 от вершины прямого угла.

166. Различных положений прямой, которая представляет перпендикуляр, восставленный в середине отрезка постоянной длины a, скользящего концами по сторонам прямого угла.

167. Различных положений отрезка постоянной длины a, который скользит одним концом по оси y, а другим концом по окружности: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

168. Различных положений окружности постоянного радиуса R, центр которой движется по параболе $y^2=2px$, а также огибающую тех траекторий, которые описывают при этом движении точки окружности, если определенный диаметр ее остается параллельным оси x.

169. Подобная же задача при движении центра окружности по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

170. Подобная же задача при движении центра окружности по гиперболе $xy = a^2$.

171. Эллипсов с полуосями a и b, у которых оси параллельны осям координат и центры лежат на эллипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

172—177. Найти огибающую системы эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ при следующих условиях:

172. $a + b = c$ (постоянное).

173. $ab = c^2$.

174. $a^2 + b^2 = c^2$.

175. $\frac{1}{a^{2/3}} + \frac{1}{b^{2/3}} = \frac{1}{c^{2/3}}$.

176. $a^{2/3} + b^{2/3} = c^{2/3}$.

177. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

178—181. Найти огибающие следующих систем прямых (t переменный параметр).

178. $y = tx + \frac{a}{2t}$.

179. $y = tx + \frac{a}{t^2}$.

180. $y = tx + \frac{at}{t-1}$.

181. $(x-a)\sin t - y\cos t = a$.

182—185. Найти кривые, касательные которых $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$ обладают следующими свойствами:

182. $\alpha\beta = a^2$.

183. $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n} = 1$.

184. $\alpha^k + \beta^k = a^k$.

185. $\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} = 1$.

186. Найти кривую, касательные которой находятся в постоянном расстоянии a от точки (x_0, y_0).

187. Найти кривую, для которой произведение перпендикуляров, опущенных на касательную из двух постоянных точек $(c, 0)$ и $(-c, 0)$, равно постоянному b^2.

188. Решить задачи 133—149, рассматривая эволюту как огибающую нормалей эвольвенты.

Вычертить графики следующих кривых:

189. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

190. $y = e^{\frac{1}{x^2}}$.

191. $y = e^{-x^2}$.

192. $y = xe^{-x}$.

193. $y = x^2e^{-x}$

194. $y = x^2e^{-\frac{3}{8}x^2}$.

195. $y = e^x - x + 1.$ **196.** $y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$ **197.** $y = e^{-x} \cos x.$

198. $y = x^2 \log x.$ **199.** $y = x^x.$

200. $y = x^{\frac{m}{n}}$ (m и n взаимно простые).

201. $y = 0{,}2x^3 + 0{,}3x^2 - 1{,}2x + 0{,}1.$ **202.** $y = 0{,}1x^4 - 0{,}4x^3 + 0{,}4x^2 + 0{,}5.$

203. $y = 0{,}3x^5 - 2{,}5x^3 + 6x + 1.$ **204.** $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}.$

205. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}.$ **206.** $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2}.$

207. $y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}.$ **208.** $y = \sin^3 x + \cos^3 x.$

209. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$ **210.** $y = \log \frac{1+x}{2-x}.$

211. $y = \log \frac{x+1}{x-2}.$ **212.** $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}.$

213. $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x-1}.$ **214.** $y^2 + x^3 - x^4 = 0.$

215. $y^2 - x^3 + x^4 = 0.$

Вычертить графики кривых, заданных параметрическими уравнениями:

216. $x = a(1 + t^2),\ y = at(1 + t^2).$ **217.** $x = at(1 - t),\ y = at^2(1 - t).$

218. $x = at^2(1 + t),\ y = at^3(1 + t).$ **219.** $x = a(1 - t^2),\ y = at(1 - t^2).$

220. $x = a(1 - t^3),\ y = at(1 - t^3).$ **221.** $x = a(1 - t)^2,\ y = at(1 - t)^2.$

222. $x = \frac{at^2}{1+t},\ y = \frac{at^3}{1+t}.$ **223.** $x = \frac{at^3}{1+t},\ y = \frac{at^4}{1+t}.$

224. $x = \frac{at^3}{1-t^2},\ y = \frac{at^4}{1-t^2}.$ **225.** $x = \frac{at^3}{1+t^2},\ y = \frac{at^4}{1+t^2}.$

226. $x = \frac{at^2}{1-t^2},\ y = \frac{at^3}{1-t^2}.$ **227.** $x = \frac{a}{1-t^3},\ y = \frac{at}{1-t^3}.$

228. $x = \frac{at^2}{1+t^3}$, $y = \frac{at^3}{1+t^3}$.

229. $x = \frac{at^3}{1+t^3}$, $y = \frac{at^4}{1+t^3}$.

230. $x = \frac{4at}{1-t^4}$, $y = \frac{4at^2}{1-t^4}$.

231. $x = 2a\sin^2 t$, $y = 2a\frac{\sin^3 t}{\cos t}$.

232. $x = a\cos t$, $y = a\cos t \cot\frac{t}{2}$.

Найти точки перегиба следующих кривых:

233. $x^3 - y^3 = ay^2$.

234. $x^3 + x^2y + 2ay^2 = 0$.

235. $y^3 = 3a(x^2 + y^2)$.

236. $x^4 - x^2y^2 + 5ay^3 = 0$.

237. $y^4 + xy^3 = \frac{1}{8}ax^3$.

238. $y^4 - x^4 = 2axy^2$.

239. $x^2y + a^2y = a^3$.

240. $4xy^2 + 36axy + 81a^2(x-y) + 729a^3 = 0$.

241. $3y^3 + 3xy^2 = 2ax^2$.

242. $r = \frac{a}{\cos^3\theta}$.

243. $r = \frac{a}{\sin^4\theta}$.

244. $r^2 = a^2(1 + 2\cos^2\theta)$.

245. $r = a(2\cos\theta + 3)$.

246. $r = a(32\sec\theta + 5)$.

247. $r = \frac{a\cos^2\theta}{\sin^2\theta(\cos\theta + \sin\theta)}$.

Исследовать фигуру кривой в области начала координат для следующих уравнений:

248. $x^4 + x^2y^2 - y^2 + 5xy - 6x^2 = 0$.

249. $2y^3 - xy^2 + y^2 - 4xy + 3x^2 = 0$.

250. $y^4 - x^4 + x^2 + 4xy + 4y^2 = 0$.

251. $x^3 + xy^2 - 9y^2 + 6xy - x^2 = 0$.

252. $y^5 - 6x^4 + 2x^2y^2 + 5x^2y - y^2 = 0$.

253. $x^6 - 2x^4 - 3xy^3 - x^2y + y^2 = 0$.

254. $x^5 + x^4 - 3xy^3 - 2x^2y + y^2 = 0$.

255. $x^5 + 2xy^3 - x^4 + 4x^2y - 4y^2 = 0$.

256. $y^7 + 2x^4y - 3x^3 = 0$.

257. $y^6 - x^4y + 2x^3 = 0$.

258. $x^7 + xy^6 - y^3 = 0$.

259. $x^5 + xy^4 + y^3 = 0$.

260. $x^5 + y^5 - x^3y + 4xy^3 = 0$.

261. $y^5 + 2x^4 + x^2y - xy^2 = 0$.

262. $x^6 + y^6 - 4x^2y^2 + x^3y = 0$.

263. $y^8 + x^6 - xy^4 + x^3y^2 = 0$.

264. $x^7 - y^6 + x^2y^3 - x^4y = 0$.

265. $y^5 + x^4 - xy^2 = 0$.

266. $-x^5 + y^4 + xy^2 = 0$.

267. $x^5 + y^5 - 2xy = 0$.

Найти ассимптоты следующих кривых:

268. $x^3 - xy^2 - x^2 + 2xy + y^2 = 0.$

269. $x^2y - xy^2 - 2y^3 - 4y^2 + x^2 - 2 = 0.$

270. $2x^3 - 3x^2y + xy^2 + 2x^2 - xy + y - 1 = 0.$

271. $2x^2y + xy^2 - y^3 + xy + y^2 - x + 1 = 0.$

272. $2x^3 - 5x^2y + 2xy^2 + 4x^2 - 10xy + 4y^2 + x + 1 = 0.$

273. $3x^2y + 2xy^2 - y^3 - 6x^2 - 4xy + 2y^2 + y - 1 = 0.$

274. $3x^2y - 4xy^2 + y^3 + xy - y^2 + x - 1 = 0.$

275. $x^3 + 5x^2y + 6xy^2 - x^2 - 2xy + y - 2 = 0.$

276. $x^4 - 4x^2y^2 + y^3 = 0.$

277. $x^5 + x^2y^3 - x^4 + 2x^2y - y^2 = 0.$

278. $r = \frac{a}{1 - 2\sin\theta}$

279. $r = a(\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta).$

280. $r = a \cdot \frac{\sin(2\theta - \alpha)}{\sin(\alpha - \theta)}.$

281. $r = \frac{a \sin 2\theta}{1 - tg\,\theta}.$

282. $r = a \cdot \frac{\sin^2\theta}{1 + 2\cos\theta}.$

283. $r = a\,tg\,\frac{\theta}{2}.$

284. $r = \frac{a}{3 - tg^2\theta}.$

285. $r = \frac{a\sin^2\theta}{\sin\theta + \cos\theta}.$

Составить уравнения линий 3-го порядка по следующим данным:

286. Даны: три ассимптоты: $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 2 = 0$ и три точки (0,1), (1,0), (2,1).

287. Даны: двойная точка (0,0) с пучком касательных $x^2 - y^2 = 0$ и две ассимптоты $x = 1$, $y = 2$.

288. Даны: точка возврата (0,0) с касательной $y = 0$, ассимптота $x = 2$ и две точки (1,1) и (—1,2).

289. Даны: точка возврата (1,1) с касательною $y = x$ и две касательные: $x = 0$ с точкой касания (0,3), $y = 0$ с точкой касания (2,0).

290. Даны: две ассимптоты $x - y + 1 = 0$, $x + y - 2 = 0$, касательная $y = 0$ в точке (1,0) и двойная точка (—1,—1).

291. Даны: три ассимптоты $x - y + 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x + 2 = 0$ и двойная точка в начале координат.

292. Даны: узел (0,0) с пучком касательных $x^2 - 4y^2 = 0$, ассимптота $2x + y - 1 = 0$ и касательная $y = x + 2$ в точке (—1,1).

293. Даны: точка возврата (0,0) с касательною $x+y=0$, ассимптота $y-1=0$ и две точки $(-1,2)$ и $(0,-1)$.

294. Если кривая 3-го порядка имеет три ассимптоты и пересекает каждую из них, то три точки пересечения лежат на одной прямой. Если же кривая имеет три ассимптоты, но пересекает только 2 из них, то две точки пересечения лежат на прямой, параллельной третьей ассимптоте.

295. Если кривая 3-го порядка имеет 2 двойных точки, то она представляет совокупность прямой и линии 2-го порядка. Если кривая 3-го порядка имеет 3 двойных точки, то она представляет систему трех пересекающихся прямых.

Вычертить графики алгебраических кривых:

296. $x^2y+xy^2-2a^3=0$.
297. $x^3+y^3-ay^2=0$.
298. $x^3-y^3-3axy=0$.
299. $y^3-x^3+3ax^2=0$.
300. $x^3+x^2y-ay^2=0$.
301. $x^3+xy^2-2ay^2=0$.
302. $x^3-xy^2+ay^2=0$.
303. $x^3-ax^2-ay^2=0$.
304. $x^3-ax^2+ay^2=0$.
305. $x^3-axy+ay^2=0$.
306. $x^3-a(x-y)^2=0$.
307. $x^4-ax^3+ay^3=0$.
308. $x^4-axy^2-ay^3=0$.
309. $x^4-ax^2y+ay^3=0$.
310. $x^4+xy^3-ay^3=0$.
311. $x^4+x^2y^2-ay^3=0$.
312. $x^4-x^2y^2-ay^3=0$.
313. $x^4+x^3y-ay^3=0$.
314. $x^4+y^4-4ax^3=0$.
315. $x^4-y^4+4ax^3=0$.
316. $x^4+y^4-4ax^2y=0$.
317. $x^4-y^4-4ax^2y=0$.
318. $x^4+y^4-2a^2xy=0$.
319. $x^4-a^2x^2+a^2y^2=0$.
320. $x^4+x^2y^2+a^2x^2-a^2y^2=0$.
321. $(y^2-b^2)^2-a^3x=0$.
322. $xy^2+4a^2x-8a^3=0$.
323. $x^3+xy^2+ax^2-ay^2=0$.
324. $x^2y^2-a^2x^2+a^2y^2=0$.
325. $(x^2+y^2-ax)^2-a^2(x^2+y^2)=0$.
326. $x^4-2x^2y^2-2a^2x^2-2a^2y^2+a^4=0$.
327. $(x^2+y^2)^2-a^2x^2-b^2y^2=0$.
328. $x^4+y^4-a^2x^2-b^2y^2=0$.
329. $xy^2+2xy+x-y+2=0$.
330. $(x^2+y^2)^2-a(x^3+y^3)=0$.
331. $x^4-2ay^3-3a^2y^2-2a^2x^2+a^4=0$.
332. $x^2y-xy^2-x-y+2=0$.
333. $x^3+x^2y-2xy^2-y^2=0$.
334. $x^2y^3-2x^2y+x^2-y=0$.
335. $x^2y+y^3+ax^2-axy=0$.
336. $x^4+x^2y^2-6ax^2y+a^2y^2=0$.
337. $x^2y-4y^3+y^2-x^2=0$.
338. $-2x^4+x^3y+x^2y^2+4x^2y-y^2=0$.

Вычертить графики кривых в полярных координатах:

339. $r = \frac{a}{\cos^2\theta}$.

340. $r = a(\cos 2\theta + \sin 2\theta)$.

341. $r = a(\operatorname{tg}\theta - 1)$.

342. $r = a \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

343. $r = a(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)$.

344. $r = a(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$.

345. $r^2 = a^2\frac{\sin 3\theta}{\cos\theta}$.

346. $r = a\frac{\sin(2\theta - \alpha)}{\sin(\alpha - \theta)}$.

347. $r = a\cos\theta + b$.

348. $r = a\sec\theta + b$.

349. $r^2 = a^2\sin 3\theta$.

350. $r = a \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos 3\theta}$.

351. Найти параболу, ось которой параллельна оси y, и которая имеет с кривой $x^3 = a^2y$ в точке (a, a) касание возможно высокого порядка.

352. Найти окружность, которая с параболой $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ имеет в точке $(1, 1)$ наивысший порядок касания.

353. Найти две параболы, которые имеют оси параллельные осям координат и образуют с окружностью $x^2 + y^2 = 5a^2$ в точке $(a, 2a)$ касание 2-го порядка.

354. Какого порядка будет касание параболы $x^2 = 2ay$ с ее кругом кривизны в ее вершине?

355. Какого порядка будет касание кривых $x^4 + y^4 = ay^3$, $x^4 = a^3(a - y)$ в точке (o, a)?

356. Доказать, что общее место центров эллипсов, которые имеют оси параллельные осям координат и образуют касание 2-го порядка с данною кривою в данной на ней точке, есть равносторонняя гипербола, проходящая через эту точку.

Вычислить длину дуги для следующих линий в пространстве:

357. $x = z\cos\log z,\ y = z\sin\log z$.

358. $x = \sqrt{z}\cos\sqrt{z},\ y = \sqrt{z}\sin\sqrt{z}$.

359. $x = \sqrt{z}\cos\frac{1}{2}\log z,\ y = \sqrt{z}\sin\frac{1}{2}\log z$.

360. $x = z\cos z,\ y = z\sin z$.

361. $x = \operatorname{ch} z,\ y = \operatorname{sh} z$.

362. $6x = z^3,\ 2y = z^2$.

363. $x^2 + y^2 = 1,\ z = \log y$.

364. $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \operatorname{ch} t$.

365. $x = \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$, $y = -\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3 + t^2$.

366. $x = az^k$, $y = bz^l$ при $l = \frac{k+1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2ka}}{l}$.

Вычислить косинусы углов касательной, бинормали и главной нормали с осями координат, а также **радиусы первой и второй кривизны** для следующих кривых **в данных** на них **точках:**

367. $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y = z^2 + 1$ в точке (1, 1, 1).

368. $y^2 = x - z + 3$, $z^2 = 3 - 2y$ в точке (—1, 1, 1).

369. $2x + y^2 - z^2 = 2$, $x^2 + 2y - z = 2$ в точке (1, 1, 1).

370. $x^2 + 2y - z^2 = 2$, $2x + y^2 - z = 2$ в точке (1, 1, 1).

371. $x^2 + y - 2z = 0$, $2x - y^2 + z^2 = -2$ в точке (—1, 1, 1).

372. $x = \cos t + \sin^2 t$, $y = \sin t\,(1 - \cos t)$, $z = -\cos t$ в точке $t = \frac{\pi}{2}$.

373. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ в точке $t = 0$ (спираль, начерченная на конусе $x^2 + y^2 = z^2$ и проектирующаяся на плоск. XOY в виде логарифмической спирали $r = e^\theta$).

374. $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$ в точке $t = 0$ (спираль, начерченная на конусе $x^2 + y^2 = z^2$ и проектирующаяся на плоскость XOY в виде спирали Архимеда $r = \theta$).

375. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^{2t}$ в точке $t = 0$ (спираль, начерченная на параболоиде $x^2 + y^2 = z$ и проектирующаяся на плоскость XOY в виде логарифмической спирали $r = e^\theta$).

376. $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t^2$ в точке $t = 0$ (спираль, начерченная на параболоиде $x^2 + y^2 = z$ и проектирующаяся на плоскость XOY в виде спирали Архимеда $r = \theta$).

377. Доказать, что для конической спирали 373 касательная, бинормаль и главная нормаль составляют постоянные углы с осью конуса (ось z).

378. Найти общее место главных нормалей к винтовой линии: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = kt$.

379. Найти общее место касательных к винтовой линии 378.

380. Найти общее место главных нормалей конической спирали 373.

381. Найти общее место касательных спирали 373.

382. Найти общее место касательных спирали 374.

383. Доказать, что система прямых: $X = Z\varphi(t) + \varphi_1(t)$, $Y = Z\psi(t) + \psi_1(t)$ при условии $\varphi'(t)\psi_1'(t) = \psi'(t)\varphi_1'(t)$ представляет систему касательных к кривой: $x = \varphi_1 + z\varphi$, $y = \psi_1 + z\psi$, $z = -\frac{\varphi_1'}{\varphi'}$.

384—386. Найти кривые по данной системе их касательных:

384. $X = -Z\sin t + t\sin t + \cos t$, $Y = Z\cos t - t\cos t + \sin t$.

385. $X = Z(\cos t - t\sin t) + t^2\sin t$, $Y = Z(\sin t + t\cos t) - t^2\cos t$.

386. $X = Z.\frac{\cos t - t\sin t}{2t} + \frac{t\cos t + t^2\sin t}{2}$,

$$Y = Z.\frac{\sin t + t\cos t}{2t} + \frac{t\sin t - t^2\cos t}{2}.$$

387. Доказать, что система: $x = at^2 + bt + c$, $y = a_1t^2 + b_1t + c_1$, $z = a_2t^2 + b_2t + c_2$ изображает всегда плоскую кривую.

388. При каком соотношении между коэффициентами кривая $x = at^3$, $y = bt^2 + b_1t + b_2$, $z = ct^2 + c_1t + c_2$ будет плоскою?

389. Доказать, что кривая 365 будет плоскою, и найти уравнение плоскости, ее содержащей.

390. Найти радиусы первой и второй кривизны кривой: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \mathrm{ch}\,t$.

391—392. Доказать равенство радиусов 1-й и 2-й кривизны для следующих кривых:

391. $6x = z^3$, $2y = z^2$. **392.** $x = \mathrm{ch}\,z$, $y = \mathrm{sh}\,z$.

393. На поверхности $f(x, y, z) = 0$ найти такую линию, чтобы во всех ее точках нормали к поверхности были параллельны данной плоскости $lx + my + nz = 0$.

394. На поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ найти линию, во всех точках которой нормали к поверхности составляли бы данный угол α с осью x.

395. На поверхности эллипсоида 394 найти такую линию, чтобы во всех ее точках касательные плоскости к поверхности были удалены от начала координат на расстояние k.

396. Найти касательные плоскости к эллипсоиду 394, параллельные данной плоскости $lx + my + nz = 0$.

397. К эллипсоиду $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z^2 = 1$ провести касательные плоскости через прямую: $\frac{x-3}{6} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-3}$.

398. Найти условие, при котором возможно провести через прямую $\frac{x-x_0}{e}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ касательные плоскости к эллипсоиду 394.

399. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz=a^3$ отсекают от угла, образуемого координатными плоскостями, тетраэдр постоянного объема: $\frac{9}{2}a^3$.

400. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $x^\lambda+y^\lambda+z^\lambda=a^\lambda$ при $\lambda=\frac{k}{k+1}$ отсекают от осей координат отрезки, сумма к-ых степеней которых постоянна и равна a^k.

401. Составить уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной в сферических координатах (θ—дополнение до широты, ψ долгота) уравнением: $\rho=a\,.\sin\theta\,.f(\psi)$. (Поверхность представляет общее место окружностей, которые лежат в плоскостях, проходящих через ось z, и построены, как на диаметрах, на радиусах-векторах кривой, заданной в плоскости XOY полярным уравнением $r=af(\psi)$.

402—404. Найти подэрные поверхности относительно начала координат для следующих поверхностей (Подэрною поверхностью называется общее место оснований перпендикуляров, опущенных из постоянной точки на все касательные плоскости данной поверхности).

402. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. **403**. $cz=xy$. **404**. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$.

405. При каком условии плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ представляет касательную плоскость к эллипсоиду 394?

406. При каком условии плоскость $Ax+By+Cz+D=0$ будет касательною к сфере $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ и в какой ее точке?

407. При каком условии две сферы:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,\ (x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2=R^2_1$$

пересекаются ортогонально (под прямым углом)?

408. При каком условии две сферы примера 407 касаются друг друга?

409. Из точки (1,1,2) провести общую касательную плоскость к двум сферам: $x^2+y^2+z^2=3$ и $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{3}{4}$.

В задачах 410—412 требуется доказать, что поверхности вида $z=\varphi(x,y)$, содержащие произвольную функцию φ, пересекают ортогонально каждую из поверхностей системы $f(x,y,z,a)=0$, содержащей произвольный параметр a:

410. $z=x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и $x^2+y^2+z^2=a^2$.

411. $2z^2=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-x^2-y^2$ и $x^2+y^2=2az$.

412. $x^2+y^2+z^2=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ и $x^2+y^2=a^2z^2$.

413. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $(3x-2y-3h)^2+(x-2z)^2-2(h-2g)(x-2z)+h^2-4hg=0$ параллельны прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1}$.

414. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $[h(x-b)+by]^2+(b^2-a^2)y^2+h^2(z-b)^2+2bhy(z-b)=0$ проходят чрез точку $(b, 0, b)$.

415. Для эллипсоида $Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz=O$ найти уравнение описанного цилиндра, образующие которого параллельны оси z.

416. Найти цилиндр, описанный около эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, если образующие его параллельны прямой $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

417. Найти конус, описанный из точки $(0,0,c)$ около поверхности $x^4+y^4+z^4=a^4$ $(c>a)$.

418. Найти конус, описанный из точки (a,b,c) около сферы $x+y^2+z^2=R^2$.

419. Найти конус, описанный из точки (x_o, y_o, z_o) около эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

420. Для двух сфер: $x^2+y^2+z^2=3$, $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{3}{4}$ найти общий описанный конус.

421. Доказать, что нормали к поверхности: $x^2+y^2+z^2=f(lx+my+nz)$ лежат в одной плоскости с прямою: $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

422. Найти поверхность вращения прямой $\frac{x}{a_1}=\frac{y}{b_1}=\frac{z}{c_1}$ около прямой $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

423. Найти поверхность вращения окружности $x^2+y^2=2Rx$, $z=0$ около прямой $x=y=z$.

424. Найти поверхность вращения линии $x^4+y^4=a^2xy$, $z=0$ около прямой $x=y=z$.

425. Доказать, что поверхность $x^2-2xy+y^2+2z^2-2ax-2ay+$ $+a^2=0$ есть поверхность вращения около оси $x=y$, $z=0$.

426. Доказать, что поверхность $(x+y)(2x^2+2y^2+3z^2-2xy)=$ $=3a\,(2xy-z^2)$ есть поверхность вращения около оси $x=y$, $z=0$.

427—436. Найти **огибающие поверхности** для следующих систем огибаемых поверхностей:

427. Плоскостей, параллельных оси z и отстоящих от начала $(0, 0, 0)$ на расстоянии R.

428. Плоскостей, проходяших через начало $(0, 0, 0)$ и отстоящих от точки $(0, b, 0)$ на расстоянии $b\sin\alpha$.

429. Плоскостей, параллельных прямой $x=y=z$ и отстоящих от начала на расстоянии R.

430. Плоскостей: $\alpha x+\beta y+\gamma z=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}$ (α, β, γ,— переменные параметры).

431. Плоскостей: $\alpha x+\beta y+\gamma=z$ при условии: $\alpha^2p+\beta^2q+2\gamma=0$. (см. 430).

432. Плоскостей: $\frac{x}{at}+\frac{y}{bt}+\frac{z}{1+ct}=1$ (t—перем. параметр).

433. Плоскостей: $xt^2+yt+z=0$.

434. Плоскостей: $x\sin t-y\cos t+z=at$.

435. Плоскостей: $x(\sin t-\cos t)-y(\sin t+\cos t)+2z=e^t$.

436. Плоскостей: $x(t\sin t-2\cos t)-y(t\cos t+2\sin t)+z(2+t^2)=t^3$.

437. Доказать, что для системы огибаемых плоскостей $x=y\varphi(t)+$ $+z\psi(t)+\omega(t)$ характеристики представляют систему касательных к некоторой кривой (ребро возврата развертывающейся поверхности).

438—440. Найти огибающую поверхность для сфер постоянного радиуса R, центр которых перемещается по одной из следующих кривых:

438. $y^2=2px$, $z=0$. **439**. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$. **440**. $xy=a^2$ $z=0$.

441—443. Найти огибающую поверхность для эллипсоидов $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ при одном из условий:

441. $a^2+b^2+c^2=l^2$. **442**. $a+b+c=l$. **443**. $a^{2/3}+b^{2/3}+c^{2/3}=l^{2/3}$.

(l данная постоянная).

444—445. Найти огибающую поверхность для параболоидов $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=z-c$ (p, q, c положительные переменные параметры) при одном из условий:

444. $c=p+q$ **445.** $\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}$.

446. Найти поверхность, касательные плоскости которой отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна и равна a.

447. Найти поверхность, касательные плоскости которой отсекают на осях координат отрезки, сумма квадратов которых постоянна и равна a^2.

448. Найти поверхность, касательные плоскости которой отсекают от координатного угла тетраэдр постоянного объема a^3.

449. Найти **точки закругления** поверхности $2x^2+3y^2=2z$.

450. Найти точки закругления поверхности $xyz=a^3$.

451. Найти точки закругления поверхности $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$.

452—456. Найти **главные радиусы кривизны** следующих поверхностей:

452. $x^2+2y^2+3z^2-2xz=3$ в точке $(1, 1, 0)$.

453. $z=a\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ **454.** $x^2+y^2=a^2\operatorname{ch}^2\left(\frac{z}{a}\right)$.

455. $z^2=2xy$. **456.** $cz=xy$.

ОТДЕЛ IV.

Геометрические приложения интегрального исчисления.

Простые интегралы.

Вычислить длину дуги следующих кривых:

1. Эволюты параболы $y^2=\frac{8}{27p}(x-p)^3$ от точки $(p, 0)$ до точки пересечения с параболой $y^2=2px$.

2. Параболы $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ между точками $(a, 0)$, $(0, b)$.

3. Замкнутой части кривой $x = 3at^2$, $y = at\,(3 - t^2)$.

4. Кривой $x = 2a\sqrt{5}\;t^3$, $y = at\,(9 - 4t^4)$ между точками $(0,0)$, $(6a\sqrt{15}, 0)$.

5. Замкнутой части кривой $x = a\sqrt{14}\,t^4$, $y = at\,(8 - t^6)$.

6. Кривой $x = 6at^5$, $y = 5at\;(1 - t^8)$ между точками $(0, 0)$, $(6a, 0)$.

7. Кривой $x = 2a\,\mathrm{sh}^3 t$, $y = 3a\,\mathrm{ch}\,t$ от точки $(0,3a)$ до (x, y).

8. Части кривой $x = 8a\,t^3$, $y = 3a\;(2t^2 - t^4)$, лежащей над осью x.

9. Замкнутой части кривой $x = 15at^4$, $y = 2a\;(5t^3 - 3t^5)$.

10. Кривой $x = 3at^6$, $y = a\;(3t^3 - t^9)$ между точками $(0, 0)$, $(9a, 0)$.

11. Кривой $x = a\cos t$, $y = -2a\log\sin t$ от точки $(0, 0)$.

12. Петли, образованной пересечением парабол $y^2 = 4ax$, $x^2 = \frac{1}{2}\,ay$.

13. Полного обвода кривой $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$.

14. Полного обвода кривой $x^{2/5} + y^{2/5} = a^{2/5}$.

15. Полного обвода кривой $x = \frac{a}{2}\sin t\,(1 + 2\cos^2 t), y = a\cos^3 t$.

16. Полного обвода эпициклоиды с n петлями:

$$x = \frac{R}{n}\Big[(n+1)\cos t - \cos(n+1)t\Big],\ y = \frac{R}{n}\Big[(n+1)\sin t - \sin(n+1)t\Big].$$

17. Полного обвода гипоциклоиды с n петлями:

$$x = \frac{R}{n}\Big[(n-1)\cos t + \cos(n-1)t\Big],\ y = \frac{R}{n}\Big[(n-1)\sin t - \sin(n-1)t\Big].$$

18. Трактриссы $x = a\left(\cos t + \log\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ от $(0, a)$ до (x, y).

19. Полного обвода кривой 88 отд. III.

20. Кривой 89 отд. III между точками $(0, 2a)$, $\left(\frac{3}{2}\pi a, 0\right)$.

21. Полного обвода кривой 90 отд. III.

22. Кривой 91 отд. III между точками $(0, 2a)$, (x, y).

23. Кривой 92 отд. III между точками $(0, 2a)$, (x, y).

24. Кривой 93 отд. III между точками (a, a), (x, y).

25. Циссоиды $x = 2a\sin^2 t$, $y = 2a \cdot \frac{\sin^3 t}{\cos t}$ между точками $(0,0)$, (x, y).

26. Кривой $(x+y)^{2/3} - (x-y)^{2/3} = a^{2/3}$ между точками (x_1, y_1), (x_2, y_2).

27. Кривой : $x = \sin t \cdot f'(t) + \cos t \cdot f''(t)$, $y = \cos t \cdot f'(t) - \sin t \cdot f''(t)$ между точками $t = t_0$ и $t = t_1$.

28. Замкнутой части кривой : $r = a(\theta^2 - 1)$.

29. Полного обвода кривой : $r = a\sin^3 \frac{\theta}{3}$.

30. Полного обвода кривой : $r = a\sin^4 \frac{\theta}{4}$.

31. Кривой : $r = a\sec u$, $\theta = \operatorname{tg} u - u$ от точки $(a, 0)$ (т. е. $r = a$, $\theta = 0$).

32. Кривой : $r = a\cos^2 u$, $\theta = 2(u - \operatorname{tg} u)$ от точки $(a, 0)$.

33. Кривой : $r = a(\sin u + \cos u)$, $\theta = u - \log(1 + \operatorname{tg} u)$ от точки $(a, 0)$.

34. Кривой : $r = a\sec^2 u$, $\theta = 2(\operatorname{tg} u - u)$ от точки $(a, 0)$.

35. Кривой : $r = a\sin u\cos u$, $\theta = 2u - \operatorname{tg} u$ от точки $(0, 0)$.

36. Кривой : $r = a(1 + \operatorname{tg} u)$, $\theta = \operatorname{tg} u - \log(1 + \operatorname{tg} u)$ от точки $(a, 0)$.

37. Кривой : $r = \frac{a}{1+\cos u}$, $\theta = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) - u$ от точки $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

38. Кривой в пространстве : $y = \frac{1}{4k+2} \cdot \frac{x^{2k+1}}{a^{2k}}$, $z = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{x^{k+1}}{a^k}$ от точки $(0, 0, 0)$.

39. Кривой : $y = \frac{1}{4}(x + \sin x\cos x)$, $z = \sin x$ от точки $(0, 0, 0)$.

40. Кривой : $y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$, $z = \log x$ от точки $(1, 0, 0)$.

41. Кривой : $x = \log(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)$, $y = \operatorname{ch} t - 1$, $z = \operatorname{sh} t$ от точки $(0, 0, 0)$.

42. Кривой : $x = \log \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t - \operatorname{arctg} \operatorname{sh} t$, $z = \operatorname{ch} t$ от точки (0, 0, 1).

43. Сферической спирали : $x = \frac{a \cos t}{\operatorname{ch} t}$, $y = \frac{a \sin t}{\operatorname{ch} t}$, $z = th\, t$ (на плоск. XOY проектируется в виде спирали $r = \frac{a}{\operatorname{ch} \theta}$) от нижнего полюса сферы до верхнего.

См. также задачи 357—366 отдела III.

Найти **координаты центра инерции однородной дуги** для следующих линий:

44. Окружности $x^2 + y^2 = R^2$ между точками $(R, 0)$, $(0, R)$.

45. Полного обвода циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

46. Астроиды $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ между точками $(a, 0)$, $(0, a)$.

47. Полного обвода кардиоиды $r = a(1 + \cos \theta)$.

48. Винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = kt$ от $t = 0$ до $t = \frac{\pi}{2}$.

Вычислить площади, ограниченные следующими линиями:

49. $y = x^2 e^{-x}$, $y = 0$, при $x > 0$.

50. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$, $y = 0$, между 2 точками прикосновения кривой к оси x.

51. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$, $y = 0$, между 2 последовательными точками пересечения кривой с осью x.

52. $y = x^3 e^{-\frac{3}{8}x^2}$, $y = 0$ (ассимптота).

53. $y^2 = x^3 - x^4$. **54.** $x^3 = a(x - y)^2$, $y = 0$.

55. Площадь петли кривой $x^3 = a(x^2 - y^2)$.

56. $x^4 = a(x^3 - y^3)$, $y = 0$. **57.** $y^2 = 2px$, $y^2 = \frac{8}{27p}(x - p)^3$, $y = 0$.

58. Площадь между эллипсом $x^2 + 2y^2 = 2a^2$ и его эволютой.

59. $x^2 + y^2 = a^2$, $y^2 = a(a - x)$.

60. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b} = 1$.

61. $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = 2ay$.

62. $y^2 + 2ax = a^2$, $y^2 - 2bx = b^2$ $(a > 0, b > 0)$.

63. $x^2+4y^2=8a^2,\ x^2-3y^2=a^2\ (x>0)$.

64. $y^2=4ax,\ x^2=\frac{1}{2}ay$.

65. $x^2+y^2=2a^2,\ y^2=ax,\ y=0$.

66. $y^2(x^2+a^2)=a^2x^2,\ y=\pm a$.

67. $(y-x)^2=a^2-x^2$.

68. $x^4=a^2x^2-b^2y^2$.

69. Площадь петли кривой; $a^2y^4=x^4(a^2-x^2)$.

70. Площадь петли кривой: $y^2(a^2+x^2)=x^2(a^2-x^2)$.

71. Площадь петли кривой: $16a^3y^2=b^2x^2(a-2x)$.

72. Площадь замкнутой части кривой: $2y^2(a^2+x^2)=(a^2-x^2)^2$.

73. $2y^2(a^2+x^2)-4ay(a^2-x^2)+(a^2-x^2)^2=0$.

74. Площадь между трактриссой $x=a\left(\cos t+\log \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y=a\sin t$ и осью x.

75. $xy^2=4a^2(2a-x),\ x=0$.

76. Площадь петли кривой $y^2(a-x)=x^2(a+x)$, а также площадь между кривою и ее ассимптотой $x=a$.

77. Площадь, ограниченную кривою 16 отд. IV.

78. Площадь, ограниченную кривою 17 отд. IV.

79. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1,\ x=0,\ y=0$.

80. $\sqrt[n]{\frac{x}{a}}+\sqrt[n]{\frac{y}{b}}=1,\ x=0,\ y=0$.

81. $\sqrt[2n+1]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}+\sqrt[2n+1]{\left(\frac{y}{b}\right)^2}=1$.

82. $\sqrt[k]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}+\sqrt[l]{\left(\frac{y}{b}\right)^2}=1$ (k, l нечетные).

83. $x^2+y^2=ax,\ x^2+y^2=by\ (a>0,\ b>0)$.

84. $x^4+y^4=4ax^3$.

85. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$.

86. $x^4+y^4=2a^2xy$.

87. $x^4+y^4=4ax^2y$.

88. $(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$.

89. $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2$.

90. $x^4+y^4=axy^2$.

91. $x^4+y^4=a^2x^2+b^2y^2$.

92. $x^6+y^6=6ax^4y$.

93. $x^6+y^6=a^2x^4+b^2y^4$.

94. $x^{2n}+y^{2n}=a^2x^{2n-2}+b^2y^{2n-2}$.

95. $x^{2n}+y^{2n}=a^2(xy)^{n-1}$.

96. $(x^2+y^2)^2=a(x^3+y^3)$.

97. Площадь петли кривой $x^4 = axy^2 + ay^3$.

98. Площадь петли кривой $x^3 = axy - ay^2$.

99. Площадь петли кривой $x^4 = ax^2y - ay^3$.

100. Площадь петли кривой $x^3 - y^3 = 3axy$.

101. $y^3 + y^3 = ay^2$, $x = 0$.

102. Площадь петли кривой $x^2y + y^3 + ax^2 - axy = 0$.

103. $x^4 + y^4 - 2ay^3 + 2ax^2y = 0$.

104. Найти две части, на которые площадь лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ делится окружностью $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}a^2$.

105. $r^2 = a^2 \sin n\theta$ (полная площадь).

106. Площадь между кривою $r = a(\sec\theta + \operatorname{tg}\theta)$, ее ассимптотою $r\cos\theta = 2a$ и полярною осью.

107. $r = a(\cos 2\theta + \sin 2\theta)$ (полная площадь).

108. Площадь петли кривой $r^2 = a^2 \dfrac{\sin 3\theta}{\cos\theta}$.

109. Площадь петли кривой $r = b + a\sec\theta$ при $a < b$ (см. 348 III).

110. Для улитки Паскаля $r = b + a\cos\theta$ при $a > b$ (см. 347 III) найти площадь внутреннего завитка и площадь между внутренним завитком и внешним обводом.

111. Полная площадь кривой $r = b + a\cos\theta$ при $a < b$.

112. Для кривой $r = \dfrac{a\cos 2\theta}{\cos\theta}$ найти площадь завитка и площадь между кривой и ее ассимптотой.

113. Площадь между кривою $r = 2a\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ и ее ассимптотой.

114. Для кривой $r = a\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$ найти площадь завитка и площадь между кривой и ее ассимптотой.

В задачах 115—132 знаками V_x, V_y обозначены **объемы вращения** данных кривых около осей x и y, значками S_x, S_y — **поверхности вращения** около осей x и y.

115. $x^4 + y^4 = a^2x^2$ . . . V_x. 116. $x^4 + y^4 = ax^3$ . . . . V_x.

117. $x = a\sin^3 t, y = a\cos^3 t$ . . . V_x, S_x.

118. $x = a\left(\cos t + \log\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\right)$, $y = a\sin t$ . . . V_x, S_x.

119. $x = 2a\sin^2 t, y = 2a\cot t$ . . . V_y.

120. $x = 2a\sin t, y = a\sin t\cos t$ . . . V_x, S_x.

121. $x = at^2, y = \frac{1}{3}at\ (3-t^2)$ между точками $(0,\ 0)$, $(3a,\ 0)$ . . V_x, S_x, V_y, S_y.

122. $x = \frac{9}{5}at^4,\ y = \frac{6}{25}a\,(5t^3-3t^5)$ между точками $(0,0)$,$(5a,0)$ . . S_x, S_y.

123. $x = 2\,at^3,\ y = \frac{3}{4}a\,(2t^2-t^4)$ между точками $(0,0)$,$(4a\sqrt{2},\ 0)$.. S_x, S_y.

124. $r^2 = a^2\cos 2\theta$ . . . V_x, V_y, S_x.

125. $r = a\,(1+\cos\theta)$ . . . V_x, S_x.

126. $r^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta\ (a>b)$ . . . V_x, S_x, V_y, S_y.

127. $(y^2-b^2)^2 = ax^3$ между точками $(0,b)$ и $(0,-b)$. . . V_y.

128. $x = a\,(t-\sin t),\ y = a\,(1-\cos t)$ . . . V_y, S_y.

129. $x = a\,(t+\sin t),\ y = a\,(1+\cos t)$ . . . V_y, S_y.

130. Объем и поверхность вращения циклоиды $x = a\,(t+\sin t)$, $y = a\ (1-\cos t)$ около касательной в ее вершине $(0,0)$.

131. Объем вращения циссоиды $x = 2a\sin^2 t, y = \frac{2a\sin^3 t}{\cos t}$ около ее ассимптоты $x = 2a$.

132. Для сегмента, отсеченного от параболы $y^2 = 2px$ хордою $x = \frac{p}{2}$, найти V_x, S_x, V_y, S_y.

Вычислить (по площадям параллельных сечений) **объемы**, ограниченные данными поверхностями:

133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$

134. $z^2 = 2px,\ y = 0,\ y = x,\ x = a,\ z = 0.$

135. $z^2 = 2px,\ z^2 = 2qy,\ x = 0,\ y = 0,\ z = a.$

136. $z^2 = 2px,\ y^2 = 2q\ (a-x).$

137. $z^2 = 2px,\ x^2 + y^2 = 2Rx.$

138. $x^2 + z^2 = 2ax,\ y = 0,\ y = \alpha x,\ z = a.$

139. $x^2 + z^2 = 2ax,\ y^2 + z^2 = 2ay,\ x = 0,\ y = 0,\ z = a\sin\alpha.$

140. $x^2 + y^2 = az,\ x^2 + y^2 = R^2,\ z = 0.$

141. $x^2 + y^2 = 2ax,\ z = \alpha_1 x,\ z = \alpha_2 x\ (\alpha_1 > \alpha_2).$

142. $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2,\ x^2 + y^2 = 2az.$

143. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=a\ (a-2z)$.

144. $x^2+y^2+z^2=2cz,\ x^2+y^2=2az\ (c>a)$.

145. $x^2+y^2=a(z-a),\ x^2+y^2=\frac{3}{16}z^2$.

146. $x^2+y^2=\frac{1}{4}z^2,\ x^2+y^2+z^2=4Rz-3R^2$.

147. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2},\ z\geqslant 0$.

148. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\ \frac{z}{c}$.

149. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\ \frac{z}{c},\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$.

150. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ 2z=c$.

151. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$ (полный объем).

152. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

Двойные интегралы.

153. Вычислить объемы 133—139 при помощи двойных интегралов в прямоугольной системе координат.

Вычислить помощью двойных интегралов объемы, ограниченные данными поверхностями:

154. $z=c.\frac{a-x}{a}\cdot\frac{b-y}{b},\ x=0,\ y=0,\ z=0$.

155. $cz=xy,\ x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b$.

156. $z^2=xy,\ x=a,\ y=b,\ z=0$.

157. $(x-a)^2+y^2=R^2,\ y+z=R,\ z=0$.

158. $x^2+y^2=R^2,\ x+y+z=a,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (a\geqslant R\sqrt{2})$.

159. $x+y+z=a,\ 3x+y=a,\ \frac{3}{2}x+y=a,\ y=0,\ z=0$.

160. $x+y+z=2a,\ x+2y=2a,\ x+y=a,\ y=2x,\ y=x,\ z=0$.

161. $x^2z^2+a^2y^2=c^2x^2,\ x=0,\ x=a$.

162. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=\frac{b}{a}x,\ y=0,\ z=0$.

163. $x^2+(z+c)^2=a^2\ (a>c),\ y=\alpha x,\ y=0,\ z=0.$

164. $y^2+z^2=2cx,\ x=a,\ y=\sqrt{\frac{2c}{a}}x,\ z=0.$

165. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y}{b}=1.$

166. $(x\cos\alpha - z\sin\alpha)^2+y^2=R^2,\ x^2+y^2=R^2.$

167. $z=c\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}$ (объем одного возвышения над плоскостью $z=0$).

168. $z=c\,.\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ (объем одного возвышения над плоскостью $z=0$).

169. $z=c\left[\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi y}{b}\right)\right],\ x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b,$ $z=0.$

170. $z=\frac{c}{ch^2\left(\frac{x}{a}\right)ch^2\left(\frac{y}{b}\right)},\ z=0.$

171. $z=\frac{c}{ch\left(\frac{x}{a}\right)ch\left(\frac{y}{b}\right)},\ z=0.$

172. $z=\frac{c^5}{(x^2+a^2)(y^2+b^2)},\ z=0.$

173. $z=\frac{c^3}{\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-y^2)}},\ x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b,\ z=0.$

174. $z=\frac{c^{k+l+1}}{(x+a)^k(y+b)^l}\ (k>1,\ l>1),\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

175. $z=e^{-(x^3+y^3)}(x+y),\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

176. $z=xye^{-(x^4+y^4)}\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

177. $z=(x^2+y^2)e^{-(x^4+y^4)},\ z=0.$

178—181. Переменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

178. $\int_{\frac{a}{2}}^{a}\int_{0}^{\sqrt{2ax-a^2}} f(x,y)\,dydx.$ **179.** $\int_0^a\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dydx.$

180. $\int_0^a\int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dydx.$ **181.** $\int_0^{2a}\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,y)\,dydx.$

182—185. Вычислить **моменты инерции** следующих однородных плоских фигур, при массе фигуры $= M$:

182. треугольника с высотою h — относительно его основания;

183. параболического сегмента ($y^2 = 2\,px$), отсеченного главною хордою длины $2\,h$, — относительно оси параболы;

184. параболического сегмента, отсеченного главною хордою, при длине отрезка оси h — относительно главной хорды;

185. площади циклоиды $x = a\ (t - \sin t),\ y = a\ (1 - \cos t)$ — относительно ее основания (ось x).

186—188. Вычислить **координаты центра инерции** однородных плоских фигур:

186. параболического сегмента ($y^2 = 2\,px$), отсеченного осью параболы и главною хордою, проведенною через точку (x, y);

187. сегмента астроиды $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$, ограниченного осями координат;

188. сегмента циклоиды $x = a\ (t - \sin t),\ y = a\ (1 - \cos t)$, ограниченного прямыми $y = 0,\ x = \pi a$.

189. Решить задачи 140 — 146 при помощи двойных интегралов в полярной системе координат ($x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$).

190—205. Вычислить **объемы**, ограниченные следующими поверхностями:

190. $z^2 = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = ax,\ y = x,\ y = 2\,x,\ z = 0$.

191. $x^2 + y^2 = Rx,\ ax + by + cz = 0,\ a_1x + by + cz = 0\ (a_1 > a)$.

192. $cz = x^2 + y^2,\ z = x + y$.

193. $cz = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 = ax,\ z = 0$.

194. $az = x^2 + y^2,\ x + z = 2\,a$.

195. $cz = xy,\ x^2 + y^2 = ax,\ z = 0,\ y > 0,\ x > 0$.

196. $cz = x^2 + y^2,\ x^4 + y^4 = a^2\ (x^2 + y^2),\ z = 0$.

197. $z^2 = 2\,xy,\ (x^2 + y^2)^2 = 2\,a^2\,xy,\ z = 0,\ y > 0,\ x > 0$.

198. $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z,\ x^2 + y^2 = ax$ при $z > 0$.

199. $z^2 = \dfrac{2axy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - x^2 - y^2$ (полный объем).

200. $y^2 + z^2 = 4a\,(x + a),\ x^2 + y^2 + z^2 = c^2\ (c > a)$.

201. $z = a - \sqrt{x^2 + y^2},\ x = z,\ x = 0$.

202. $z = a\cdot arctg\dfrac{y}{x},\ x^2 + y^2 + R^2,\ x = 0,\ z = 0$.

203. $z = c + \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$, $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$.

204. $x^2z^2 + a^2y^2 = z^2(a^2 - z^2)$ (полный объем).

205. $cz = x^2 + y^2$, $(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2$, $z = 0$.

206. Остающийся объем сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, если отнять части, вырезаемые цилиндрами с основаниями $r^2 = a^2\cos 2\theta$, $r^2 = -a^2\cos 2\theta$.

207. Остающийся объем сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, если отнять части, вырезаемые цилиндрами с основаниями: $r^2 = a^2\cos 4\theta$, $r^2 = -a^2\cos 4\theta$.

208. Даны поверхности $2cz = y^2 - x^2 + 2xy\cot\alpha$ $(0 < \alpha < \pi)$, $x^2 + y^2 = R^2$. Найти 1) ту часть объема, которая расположена над плоскостью XOY, 2) ту часть объема, которая расположена внутри угла положит. координат.

Вычислить **моменты инерции** однородных плоских фигур, при массе фигуры $= M$:

209. площади круга $x^2 + y^2 = R^2$ относит. одного из диаметров;

210. площади кардиоиды $r = a(1 + \cos\theta)$ относ. полярной оси;

211. площади лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\theta$ относ. полярной оси.

Вычислить **координаты центра инерции** однородных плоских фигур:

212. площади кругового квадранта при радиусе R;

213. площади кругового сектора при радиусе R и центральном угле α;

214. площади, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\theta)$ и полярною осью;

215. площади лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\theta$, лежащей внутри угла положит. координат;

216. площади петли Декартова Листа $x^3 + y^3 = 3axy$.

217. Вычислить объемы в зад. 147—150 помощью двойных интегралов в системе координат $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$.

Определить **площади**, ограниченные следующими линиями:

218. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{2xy}{c^2}$. **219**. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$.

220. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3 = \frac{x^4}{h^4} + \frac{y^4}{k^4}$. **221**. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$.

222. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^3}{h^3} + \frac{y^3}{k^3}$. **223**. Петля кривой $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{3xy}{c^2}$.

224. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{xy}{c^2}$. **225.** $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^3}{c^3}$.

226. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$. **227.** $\frac{x^6}{a^6}+\frac{y^6}{b^6}=\frac{x^4}{h^4}+\frac{y^4}{k^4}$.

228. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2-2\frac{x}{a}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-\frac{y^2}{b^2}=0$.

229. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3=\frac{x^4y}{c^5}$.

230. $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2y}{c^3}$. **231.** $x^4=bxy^2+ay^3$ (площ. петли).

232. $cx^3=(bx-ay)^2$, $y=0$. **233.** $x^3=bxy-ay^2$ (петля).

234. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}=\frac{y^2}{c^2}, x=0$. **235.** $\frac{x^3}{a^3}-\frac{y^3}{b^3}=\frac{xy}{c^2}$ (петля).

236. $cx\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=y^2$, $x=\frac{b^2}{c}$.

237. $x^3=bx^2-ay^2$ (петля).

238. $(bx^2+ay^2)^3=4c^5x^2y^2$. **239.** $x^4=bx^2y-ay^3$ (петля).

240. $x^4=bx^3-ay^3$, $y=0$. **241.** $bx^4+ay^4=c^2xy^2$.

242. $bx^6+ay^6=6c^2x^4y$. **243.** $bx^{2n}+ay^{2n}=c^3x^{2n-2}+d^3y^{2n-2}$.

244. $bx^{2n}+ay^{2n}=c^3(xy)^{n-1}$.

Вычислить **объемы**, ограниченные следующими поверхностями:

245. $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^{2n}=1$ (n целое полож.).

246. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$.

247. $cz=xy$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$, $y>0$, $x>0$.

248. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1$.

249. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^k+\frac{z}{c}=1$, $z=0$ $(k>0)$.

250. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{x}{h}$, $z=0$.

251. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}, \quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x}{h}, \quad z=0.$

252. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}, \quad \frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}, \quad z=0.$

253. $z^2=2xy, \quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2}, \quad z=0, \ y>0, \ x>0.$

254. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z, \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{4xy}{c^2}, \quad z=0.$

255. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=2.$

256. $cz=xy, \frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}, \quad z=0, \ y>0, \ x>0.$

257. $2z=\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z\geqq 0.$

258. $z=c\,.\,e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}, \quad z=0.$

259. $z=c\,.\sin\pi\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$ (объемы последовательных колец, образуемых над плоскостью XOY).

260. $z=c\sin\pi\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$ (см. 259).

261. $z=\frac{c}{ch^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}, \quad z=0.$

262. $\frac{z}{c}=\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}, \quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{y}{h}, \quad z=0.$

263. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0, \quad y=kx.$

264. $\frac{y^2}{b^2}=\left(1-\frac{z}{c}\right)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right), \quad x=0, \ y=0, \ z=0.$

265. Остающийся объем эллипсоида $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, если отнять части, вырезаемые цилиндрами

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{x}{a}=0, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x}{a}=0.$$

266. Остающийся объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, если отнять части, вырезаемые цилиндрами

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},\quad \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}.$$

267. Момент инерции однородной эллиптической пластинки с полуосями a, b и массою M относительно большой и малой оси.

Определить центры инерции следующих однородных плоских фигур:

268. Квадранта эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ между положит. осями координат.

269. Петли кривой $\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}=\frac{x^2y}{c^3}$ между полож. осями координат.

270. Петли кривой $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3=\frac{x^4y}{c^5}$ между полож. осями координат.

Вычислить **площади**, ограниченные следующими линиями (все параметры в уравнениях считаются положительными):

271. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a}-\frac{y}{b},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0.$

272. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{x^2}{h^2},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0.$

273. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{xy}{c^2},\ x\geqq \theta,\ y\geqq 0.$

274. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{x}{h}-\frac{y}{k},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0.$

275. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{x^2}{h^2},\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=\frac{y^2}{k^2},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0.$

276. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2y}{c^3},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0.$

277. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0.$

278. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0.$

279. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^2y^2}{c^4},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0.$

280. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^3}{h^3}-\frac{y^3}{k^3},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0.$

281. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5=\frac{x^3}{h^3}+\frac{y^3}{k^3},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0.$

282. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n=\frac{x^{n-2}}{h^{n-2}}+\frac{y^{n-2}}{k^{n-2}},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0.$

283. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=\left(\frac{xy}{c^2}\right)^{n'},\ x\geqq 0,\ y\geqq 0.$

Вычислить **объемы**, ограниченные следующими поверхностями:

284. $z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q},\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

285. $z^2=xy,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=3,$

$\frac{x}{a}-3\frac{y}{b}=0,\ 3\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\ z=0.$

286. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

287. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=1,\ x=0,\ y=0\ \ z=0.$

288. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^k+\frac{z}{c}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (k>0).$

289. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^k=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (k>0).$

290. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

291. $cz=xy,\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4=\frac{xy}{ab},\ z=0,\ y>0,\ x>0.$

292. $z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q},\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^{10}=\frac{xy}{c^2},\ z=0,\ y>0,\ x>0.$

293. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,\ \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2=\frac{x}{a},\ z=0,\ y=0.$

294. $z^2 = xy$, $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^5 = \frac{y^2}{b^2}$, $z=0$, $y>0$, $x>0$.

295. $\frac{z}{c} = \left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4$, $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^7 = \frac{x}{h} - \frac{y}{k}$, $z=0$, $y=0$, $x>0$.

296. $z = c\cdot\sin\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (объемы последовательных параллельных трубок, лежащих внутри угла положит. координат).

297. $z = c\cdot\sin\left[\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2\right]$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ (см. 296).

298. $z = c\log\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

299. $z = c\cdot e^{-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

300. Найти центр инерции однородной площадки, ограниченной прямыми $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$, $3\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$.

301. Найти центр инерции площади петли кривой $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^4 = \frac{xy}{ab}$, лежащей внутри угла полож. координат.

302. Площадь: $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=2$,

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\ 3\sqrt{3}\,\frac{x}{a}=\frac{y}{b},\ x>0,\ y>0.$$

303. Площадь: $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^6 = \frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}$.

304. Площадь петли. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^{12} = \frac{xy}{c^2}$.

305. Объем: $\left[\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^3+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$.

306. Объем: $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^6+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$.

307. Объем: $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^3 + \left(\frac{z}{c}\right)^{2k} = 1, k > 0.$

308. Объем: $z^3 = cxy, \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^7 = \frac{xy}{h^2}, z = 0, y > 0, x > 0.$

309. Объем: $z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}, \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1, z = 0.$

310. Объем: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1.$

311. Какую часть объема, ограниченного поверхностью $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2/3} = 1$, отсекает плоскость $z = \frac{1}{8}c$.

312. Объемы последовательных колец, образуемых над плоскостью XOY поверхностью $z = c.\sin\pi\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}\right]^3$.

313. Площадь: $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{x}{a} = 9\frac{y}{b}.$

314. Площадь: $\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$.

315. Площадь петли: $\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^{12} = \frac{xy}{c^2}$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$.

316. Объем: $\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0)$.

317. Объем: $\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^{2k} + \frac{z}{c} = 1$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ k > 0)$.

318. Объем: $\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^4 + \left(\frac{z}{c}\right)^k = 1$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0, z \geqq 0,\ k > 0)$,

319. Объем: $z = ce^{-\left(\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}}\right)^8}$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0, z \geqq 0)$.

В задачах 320—361 требуется определить **площади и объемы,** выбирая так систему координат, чтобы **пределы интегрирования были постоянными** по обоим переменным интегрирования.

320. Площадь: $x-y=0,\ x-2y=0,\ x+y=a,\ x+3y=a.$

321. Объем: $z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q},\ x=y,\ x=3y,\ x+y=a,\ x+2y=a,$ $z=0.$

322. Объем: $z=\frac{a^4}{y^6}(2x-a)^3,\ x=y,\ x=2y,\ x=a,\ x+y=a,$ $z=0.$

323. Объем: $z=\frac{a^4}{y^3}\sin\left(\frac{\pi x}{y}\right),\ x=2y,\ x=3y,\ x+y=a,$ $x+2y=a,\ z=0.$

324. Площадь: $x+y=a,\ x+y=b,\ y=\alpha x,\ y=\beta x\ (a>b>0,$ $\alpha>\beta>0).$

325. Площадь: $x^2=ay,\ x^2=by,\ y=m,\ y=n\ (a>b>0,$ $m>n>0),\ x>0.$

326. Объем: $c^2z=\frac{x^3}{y^2}(x^2+y^2),\ x^2=ay,\ x^2=by,\ y=m,\ y=n,$ $z=0,\ x>0.$

327. Площадь: $xy=a^2,\ xy=b^2,\ y=m,\ y=n\ (a>b>0,$ $m>n>0).$

328. Объем: $z=ye^{-\frac{xy}{a^2}};\ xy=a^2, xy=2a^2, y=m, y=n, z=0.$

329. Площадь: $y^2=mx,\ y^2=nx,\ x=\alpha y,\ x=\beta y\ (m>n>0,$ $\alpha>\beta>0).$

330. Объем: $z^2=xy,\ y^2=mx,\ y^2=nx,\ x=\alpha y,\ x=\beta y,\ z=0.$

331. Объем: $cz=xy,\ y^2=mx,\ y^2=nx,\ x=\alpha y,\ x=\beta y,\ z=0.$

332. Объем: $z=y\sin\left[\pi\left(\frac{x}{y}\right)^4\right],\ y^2=mx,\ y^2=nx,\ x=\alpha y,$ $x=\beta y,\ z=0\ (m>n>0,1>\alpha>\beta>0).$

333. Площадь: $xy=a^2,\ xy=b^2,\ x=\alpha y,\ x=\beta y\ (\alpha>\beta>0).$

334. Объем: $cz=xy,\ xy=a^2,\ xy=4a^2,\ x=y,\ x=9y,\ z=0$ (внутри угла полож. координат).

335. Объем: $z^2=xy,\ xy=a^2,\ xy=4a^2,\ x=2y,\ x=3y,\ z=0$ (внутри угла полож. координат).

336. Объем: $z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q}$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $x = 3y$, $z = 0$ (при $x > 0$, $y > 0$).

337. Объем: $z = c \sin\left(\frac{\pi xy}{4a^2}\right)$, $xy = a^2$, $xy = 4a^2$, $x = y$, $x = 2y$, $z = 0$ (при $x > 0$, $y > 0$).

338. Объем: $z = \frac{cx}{y} \sin \frac{\pi\sqrt{xy}}{2a}$, $xy = a^2$, $xy = 4a^2$, $x = 2y$ $x = 3y$, $z = 0$ (при $x > 0$, $y > 0$).

339. Площадь: $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $x^2 = my$, $x^2 = ny$ ($a > b > 0$, $m > n > 0$).

340. Объем: $cz = xy$, $y^2 = 2ax$, $y^2 = 3ax$, $x^2 = by$, $x^2 = 2by$, $z = 0$.

341. Объем: $z^2 = xy$, $y^2 = ax$, $y^2 = 4ax$, $x^2 = by$, $x^2 = 9by$. $z = 0$.

342. Объем: $z = \frac{y^3}{a^2}\sin\left(\frac{\pi xy}{4a^2}\right)$, $y^2 = 2ax$, $x^2 = 2ay$, $z = 0$.

343. Объем: $z = \frac{xy}{a} \sin\left[\frac{\pi(x^3 + y^3)}{4axy}\right]$, $y^2 = 2ax$, $x^2 = 2ay$, $z = 0$.

344. Площадь: $xy = a^2$, $xy = b^2$, $y^2 = mx$, $y^2 = nx$ ($a > b > 0$, $m > n > 0$).

345. Объем: $z^2 = xy$, $xy = a^2$, $xy = 4a^2$, $y^2 = bx$, $y^2 = 3bx$, $z = 0$.

346. Объем: $cz = xy$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y^2 = bx$, $y^2 = 2bx$, $z = 0$.

347. Объем: $z = \frac{y^3}{a^2}\sin\left(\frac{\pi x^2 y^2}{16a^4}\right) xy = 2a^2$, $xy = 4a^2$, $y^2 = bx$, $y^2 = 2bx$, $z = 0$.

348. Площадь: $x^3 = a^2 y$, $x^3 = b^2 y$, $y^3 = c^2 x$, $y^3 = d^2 x$ ($a > b > 0$, $c > d > 0$), $x > 0$, $y > 0$.

349. Площадь: $y = \frac{x^k}{a^{k-1}}$, $y = \frac{x^k}{b^{k-1}}$, $x = \frac{y^k}{c^{k-1}}$, $x = \frac{y^k}{d^{k-1}}$ ($a > b > 0$, $c > d > 0$, $k^2 - 1 \gtrless 0$), $x > 0$, $y > 0$.

350. Площадь: $y = \frac{x^2}{a}$, $y = \frac{x^2}{b}$, $y^2 = \frac{x^3}{c}$, $y^2 = \frac{x^3}{d}$ ($a > b > 0$, $c > d > 0$).

351. Площадь: $y = \frac{x^3}{a^2}$, $y = \frac{x^3}{b^2}$, $y = \frac{x^2}{c}$, $y = \frac{x^3}{d}$ ($a > b > 0$, $c > d > 0$).

352. Площадь: $y=\frac{x^k}{a^{k-1}}$, $y=\frac{x^k}{b^{k-1}}$, $y=\frac{x^l}{c^{l-1}}$, $y=\frac{x^l}{d^{l-1}}$ $(a>b>0,$ $c>d>0,\ k>l,\ k^2-1\gtrless 0,\ l^2-1\gtrless 0)$, $x>0,\ y>0$.

353. Площадь: $y=\frac{x^k}{a^{k-1}}$, $y=\frac{x^k}{b^{k-1}}$, $y=\alpha x$, $y=\beta x$ $(a>b>0,$ $\alpha>\beta>0,\ k^2-1\gtrless 0)$, $x>0,\ y>0$.

354. Площадь: $y=\frac{x^k}{a^{k-1}}$, $y=\frac{x^k}{b^{k-1}}$, $xy=c^2$, $xy=d^2$ $(a>b>0,$ $c>d>0,\ k^2-1\gtrless 0)$, $x>0,\ y>0$.

355. Площадь: $y^2+2ax=a^2$, $y^2+2bx=b^2$, $y^2-2mx=m^2$, $y^2-2nx=n^2$, $y=0$ $(a>b>0,\ m>n>0)$.

356. Объем: $c^2z=x^2y$, $y^2+2ax=a^2$, $y^2-2mx=m^2$, $y=0$, $z=0$ $(a>0,\ m>0)$.

357. Площадь: $x^2+y^2=ay$, $x^2+y^2=by$, $x=\alpha y$, $x=\beta y$ $(a>b>0,\ \alpha>\beta>0)$.

358. Площадь: $x^2+y^2=ax$, $x^2+y^2=a_1x$, $x^2+y^2=by$, $x^2+y^2=b_1y$ $(a>a_1>0,\ b>b_1>0)$.

359. Площадь: $\frac{x^2}{ch^2u_0}+\frac{y^2}{sh^2u_0}=c^2$, $\frac{x^2}{ch^2u_1}+\frac{y^2}{sh^2u_1}=c^2$, $\frac{x^2}{\cos^2v_0}-\frac{y^2}{\sin^2v_0}=c^2$, $\frac{x^2}{\cos^2v_1}-\frac{y^2}{\sin^2v_1}=c^2$ $(u_1>u_0>0,\ v_1>v_0>0)$ при $x>0,\ y>0$.

360. Площадь: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$, $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$, $\frac{x^2}{m_1^2}-\frac{y^2}{n_1^2}=1$ $(a_1>a,\ \ m_1<m)$ при $a^2-b^2=a_1^2-b_1^2=m^2+n^2=m_1^2+n_1^2=c^2$ (постоянному) и при $x>0,\ y>0$.

361. Объем: $kz=xy$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$, $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$, $\frac{x^2}{m_1^2}-\frac{y^2}{n_1^2}=1$, $z=0$ при $x>0,\ y>0,\ a_1>a,\ n_1>n,\ a^2-b^2=a_1^2-b_1^2=m^2+n^2=m_1^2+n_1^2=c^2$.

362. Решить прим. 159 помощью системы коорд. $x=\frac{v-a}{u}$, $y=v$.

363. Решить прим. 160 помощью системы коорд. $x = \frac{a}{u+v}$, $y = \frac{au}{u+v}$.

Преобразовать следующие определенные интегралы, вводя новые переменные u и v:

364. $\int_0^c \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dxdy,\ u = x + y,\ uv = y.$

365. $\int_0^c \int_{\alpha x}^{\alpha c} f(x, y)\, dxdy,\ ux = y,\ vx = \alpha c - y.$

366. $\int_a^{2a} \int_{b\left(3-\frac{x}{a}\right)}^{2b} f(x, y)\, dxdy,\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta.$

367. $\int_0^c \int_{\alpha x}^{\alpha c} f(x, y)\, dxdy,\ x = uy,\ a - x = vy.$

368. $\int_0^a \int_0^b f(x, y)\, dxdy,\ u = y + \alpha x,\ uv = y.$

В задачах 369—411 требуется определить часть **поверхности** $f(x, y, z) = 0$, вырезаемую поверхностями $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ и пр., что для краткости обозначается так:

$$f(x, y, z) : \varphi(x, y) = 0,\ \psi(x, y) = 0, \text{ и пр.}$$

369. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

370. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 : x^4 = a^2 x^2 - b^2 y^2\ (a < b).$

371. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 : y^2 = a(a + x),\ x = 0.$

372. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 : x^3 + by^2 = a^2 x\ (b \geqq a).$

373. $y^2 + z^2 = x^2 : x^2 - y^2 = a^2,\ y = +b,\ y = -b.$

374. $y^2 + z^2 = x^2 : x^2 + y^2 = a^2.$

375. $y^2 + z^2 = x^2 : x^2 = ay.$

376. $y^2 + z^2 = x^2 : x^2 y^2 = a^2 (x^2 - y^2),\ y = +a,\ y = -a.$

377. $x^2 = 2c(c - z) : y = \alpha x,\ y = 0,\ z = 0.$

378. $x^2 + (z + c)^2 = a^2\ (a > c) : y = \alpha x,\ y = 0,\ z = 0.$

379. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 : x^4 = a^2 x^2 - c^2 y^2.$

380. $x^2 = 2c(c - z) : x^2 y^2 = a^2 x^2 - c^2 y^2,\ z \geqq 0.$

381. $x^2 = 2c(c - z) : y^2 - x^2 = c^2,\ z \geqq 0.$

382. $x^2+(z+c)^2=a^2\ (a>c): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ z\geqq 0.$

383. $x^2+(z+c)^2=a^2\ (a>c): x^4=a^2x^2-b^2y^2,\ z\geqq 0.$

384. $x^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}: y^2=2px.$

385. $x^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}: x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$

386. $x^{2/3}+z^{2/3}=a^{2/3}: by^2=x^3.$

387. $z=a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}: y=\dfrac{a}{\mathrm{ch}^2\dfrac{x}{a}},\ y=0.$

388. $x^3=az^2: y^2=a(4a-9x).$

389. $z^2=x^2+a^2: y^2(2x^2+a^2)=a^2x^2,\ x=+a,\ x=-a.$

390. $z=a\log\dfrac{a^2}{a^2-x^2}: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

391. $z=\dfrac{x^3}{a^2}: y=\dfrac{x^3}{a^2},\ x=a,\ y=0.$

392. $x^2+z^2=2ax: y^2=2px.$

393. $z^2=2xy: x=a,\ y=b.$

394. $2pz=x^2: y=\alpha x,\ y=\beta x,\ x=a\ (\alpha>\beta>0).$

395. $z^2=2px: y^2=2px,\ x=a.$

396. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1\ (a>b): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=1.$

397. $z^2=2xy: y^2=2px,\ x=a,\ z\geqq 0.$

398. $z^2=2px: x^2+y^2=2ax,\ z\geqq 0.$

399. $z=c\cdot\mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x}: x^2+y^2=R^2,\ x=0.$

400. $x^2+y^2=2az: x^2+y^2+z^2=2cz\ (c>a).$

401. $2cz=y^2-x^2+2xy\cot\alpha: x^2+y^2=R^2,\ z\geqq 0.$

402. $\left(\dfrac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{3/2}+\dfrac{z}{c}=1: z\geqq 0.$

403. $x^2+y^2=2az: (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$

404. $cz=xy: (x^2+y^2)^2=2c^2xy,\ z\geqq 0.$

405. $x^2+y^2+z^2=2hz: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}.$

406. $x^2+y^2+z^2=2hz: \dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}=2z.$

407. $(x^2+y^2)^3=c^2z^4 : x^2+y^2=\frac{1}{16}c^2.$

408. $x^2+y^2=a^2 \operatorname{ch}^2\frac{z}{a} : x^2+y^2=2a^2.$

409. $x^2+y^2+z^2=2cz : x^2+y^2=2az \; (c>a).$

410. $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \; (c^2>a^2) : x^2+y^2=R^2 \; (R<a).$

411. $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \; (c^2<a^2) : x^2+y^2=R^2 \; (R<a).$

412. Полная поверхность тела, ограниченного сферою $x^2+y^2+z^2=3a^2$ и параболоидом $x^2+y^2=2az$.

413. Полная поверхность тела, ограниченного сферою $x^2+y^2+z^2=R^2$ и конусом $x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\alpha$ при $z\geq 0$.

414. Остающаяся часть поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, если отнять части, вырезаемые цилиндрами: $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, $(x^2+y^2)^2=a^2(y^2-x^2)$.

415. Остающаяся часть поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, если отнять части, вырезаемые цилиндрами: $r^2=a^2\cos n\theta$, $r^2=-a^2\cos n\theta$.

416. Полная поверхность: $\rho=a\sin\theta f(\psi)$ (ρ,θ,ψ—сферические координаты, см. пр. 401 отд. III).

417. Полная поверхность: $\rho=a\sin\theta\sqrt{\cos 2\psi}$.

418. Полная поверхность: $\rho=a\sin\theta\,(1+\cos\psi)$.

419. Полная поверхность: $\rho=\frac{a\sin\theta}{(\sin^{2/3}\psi+\cos^{2/3}\psi)^{3/2}}$.

420. Поверхность вращения кривой $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)$ около оси z.

421—428. Определить величину **поверхности** (относ. обозначений см. 369).

421. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

422. $\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z\geq 0.$

423. $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z : \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$

424. $x^2+y^2+z^2=R^2 : x+y=R,\; x=0,\; y=0.$

425. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z}{c}=1 : x=0,\; y=0,\; z=0.$

426. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3+\frac{z}{c}=1$: $x=0$, $y=0$, $z=0$.

427. $z=\left[\sqrt{\frac{x^3}{a}}+\sqrt{\frac{y^3}{b}}\right]$: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $x=0$, $y=0$.

428. $x^{2/3}+y^{2/3}=z^{2/3}$: $z=c$, $z=0$.

429—431. Вычислить **моменты инерции однородных поверхностей** при массе поверхностей M:

429. Конуса $x^2+y^2=tg^2\alpha\cdot z^2$ при радиусе основания R—относительно оси конуса.

430. Сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ относ. одного из диаметров.

431. Параболоида $x^2+y^2=2cz$, отсеченного плоскостью $z=c$, относ. оси z.

432—435. Определить **координаты центра инерции однородных поверхностей:**

432. $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

433. $x^2+y^2=tg^2\alpha\cdot z^2$, $z=H$.

434. $x^2+y^2=2cz$, $z=c$.

435. Сферического сегмента при радиусе основания r_0 и высоте h.

436. Вычислить интеграл $\int\int\frac{dS}{P}$, распространенный по поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, где dS—элемент поверхности и P—расстояние от начала координат до касательной плоскости к этому элементу.

437. Вычислить интеграл $\int\int\frac{dS}{\rho^n}$, распространенный по поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$, где dS—элемент поверхности и ρ—расстояние этого элемента до постоянной точки $(0, 0, c)$ $(c>a)$.

438. Известно, что на кондукторе, имеющем форму эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и заряженном E единицами статического электричества, плотность электричества в точке $M(x, y, z)$ равна $\sigma=\frac{E.P}{4\pi abc}$, где P расстояние от центра эллипсоида до касательной плоскости в точке M. Проверить, что полный заряд, представляющийся двойным интегралом $\int\int\sigma dS$ (dS элемент поверхности), распространенным по всей поверхности эллипсоида, равен E.

439. Для эллипсоидального кондуктора $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$ $(a>b)$, заряженного E единицами статического электричества, найти потенциальную функцию в точках оси z: $A(0, 0, z)$, т. е. вычислить двойной интеграл $\int\int\frac{\sigma dS}{\rho}$, распространенный по всей поверхности эллипсоида, причем σ означает плотность эл-ства (см. 438 зад.) на элементе dS и ρ расстояние этого элемента до точки A.

440. Тот же вопрос для эллипсоидального кондуктора $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ $(a>b)$.

Тройные интегралы.

Вычислить **при помощи тройных интегралов объемы**, ограниченные следующими поверхностями (все параметры считаются положительными):

441. $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2tg^2\alpha$, $x^2+y^2=z^2tg^2\beta$ $(\alpha<\beta)$.

442. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$. **443**. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$.

444. $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz$. **445**. $(x^2+y^2+z^2)^2=az(x^2+y^2)$.

446. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2(x^2+y^2-z^2)$.

447. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2y^2z^2$.

448. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3xyz$.

449. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2(x^2+y^2)^2$.

450. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3(x^3+y^3)$.

451. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^3z(x^2-y^2)$.

452. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^2x^2y^2$.

453. $(x^2+y^2+z^2)^3=az(x^2+y^2)^2$.

454. $(x^2+y^2+z^2)^4=a^3z(x^4+y^4)$.

455. $(x^2+y^2+z^2)^n=a^3z(x^{2n-4}+y^{2n-4})$.

456. $(x^2+y^2+z^2)^n=a^3z^{2n-6}(x^3+y^3)$.

457. $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3x$.

458. $(x^2+y^2)^2+z^4=a^3(y-x)$.

459. $(x^2+y^2)^2+z^4=az(x^2+y^2)$.

460. $(x+y^2)^2+z^4=a^3z$.

461. $[(x^2+y^2)^2+z^4]^2=a^3z(x^2+y^2)^2$.

462. $[(x^2+y^2)^2+z^4]^3=a^6x^2y^2z^2$.

463. $(x^2+y^2)^3+z^6=a^3xyz$.

464. $[(x^2+y^2)^3+z^6]^2=a^6(x^2+y^2)^3$.

465. $(x^2+y^2)^n+z^{2n}=a^3z^{2n-3}$.

466. $(x^2+y^2+z^2-R^2+a^2)^2=4a^2(x^2+y^2)$, $R\leqq a$.

467. $(x^2+y^2+z^2)^4-a^2(x^2+y^2+z^2)^3+a^4z^2(x^2+y^2)=0$.

468. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3ze^{-\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}}$.

469. $(x^2+y^2+z^2)^3=\dfrac{a^6z^2}{x^2+y^2}$. **470.** $(x^2+y^2+z^2)^2=\dfrac{a^6}{x^2+y^2}$.

471. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^6\sin^2\left(\dfrac{\pi z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$.

472. $(x^2+y^2+z^2)^3=a^6.e^{-\frac{2z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}$.

473. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\log\dfrac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}$.

474. $\rho=a\sin\theta\ (1+\cos\psi)$ (401 III).

475. $\rho=a\sin\theta\,.\sqrt[3]{\sin\psi}$. **476.** $\rho=\sin\theta\,(a\sin^2\psi+b\cos^2\psi)$.

477. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=2$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$,

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=3\dfrac{z^2}{c^2}$, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$, $\dfrac{x}{a}=\sqrt{3}\,\dfrac{y}{b}$, $z\geqq 0$.

478. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x}{h}$. **479.** $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{z}{h}$.

480. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{xyz}{h^3}$

481. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z}{k^2}$.

482. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=\dfrac{z}{1}\left(\dfrac{x^2}{h^2}+\dfrac{y^2}{k^2}\right)$.

483. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^3=\dfrac{z^4}{h^4}$.

484. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^3=\dfrac{x^2z}{h^3}$. **485.** $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^3=\dfrac{x^2y^2}{h^4}$.

486. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^3=\dfrac{x^3}{h^3}-\dfrac{y}{k^3}$.

487. $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^3=\dfrac{xyz}{h^3}$.

488. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3=\frac{z}{l}\left(\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}\right).$

489. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^4=\frac{z}{l}\left(\frac{x^4}{h^4}+\frac{y^4}{k^4}\right).$

490. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=\frac{x}{h}.$ 491. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=\frac{z}{k}.$

492. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}=\frac{y}{k}-\frac{x}{h}.$

493. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^2}=\frac{z}{l}\left(\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}\right).$

494. $\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}\right]^2=\frac{z^3}{l^3}\left(\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}\right).$

495. $\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}\right]^2=\frac{z}{l}\left(\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}\right)^2.$

496. $\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2+\frac{z^4}{c^4}\right]^3=\frac{x^2y^2z^2}{h^6}.$

497. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3+\frac{z^6}{c^6}=\frac{xyz}{h^3}.$

498. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3+\frac{z^6}{c^6}=\frac{z}{l}\left(\frac{x^2}{h^2}+\frac{y^2}{k^2}\right).$

499. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^3+\frac{z^6}{c^6}=\frac{z}{l}\left(\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}\right).$

500. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^n+\frac{z^{2n}}{c^{2n}}=\frac{z}{l}\left(\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}\right)^{n-2}.$

501. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\alpha^2\right)^2=4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),\ \alpha^2<1.$

502. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\alpha^2\right)^2=4\frac{z^2}{c^2},\ \alpha^2<1.$

503. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{l}\cdot e^{\frac{-\frac{z^2}{c^2}}{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}.$

504. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{z}{l}\sin\frac{\frac{\pi z}{c}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}.$

505. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^5=\frac{z^6}{l^6\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}$.

506. $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^4=\frac{z^4}{1^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}$.

507. $x+y+z=a$, $x+y+z=2a$, $x+y=z$, $x+y=2z$, $y=x$, $y=3x$.

508. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{z}{1}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

509. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

510. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

511. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{z}{h}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

512. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\frac{x}{h}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

513. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

514. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\frac{z^2}{h^2}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

515. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

516. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

517. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{k}\right)^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

518. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\left(\frac{x}{h}-\frac{y}{k}\right)^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

519. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^6=\frac{xyz}{h^3}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

520. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=\frac{z}{h}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

521. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{h}+\frac{y}{k}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

522. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x}{h}-\frac{y}{k}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

523. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3+\frac{z^3}{c^3}=\left(\frac{z}{h}\right)^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

524. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3+\frac{z^3}{c^3}=\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{k}\right)^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

525. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3+\frac{z^3}{c^3}=\left(\frac{x}{h}-\frac{y}{b}\right)^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

526. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^n=\left(\frac{z}{h}\right)^{n-3}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

527. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^n=\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{k}\right)^{n-3}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

528. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^n=\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right)^k$ $(n>k)$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

529. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^n=\left(\frac{x}{p}-\frac{y}{q}\right)^k$ $(n>k)$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

530. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^n=\left(\frac{z}{h}\right)^{n-3}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

531. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^n=\left(\frac{z}{h}\right)^k$ $(n>k)$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

532. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^{3n}=\left(\frac{xyz}{h^3}\right)^{n-1}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

533. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2=\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

534. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^6=\frac{h^2}{xy}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

535. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\sin\frac{\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

536. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=e^{\frac{-\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

537. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^3=\log\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

538. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$, $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=\mathrm{tg}^2\alpha.\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}$,

$\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=\mathrm{tg}^2\beta.\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}$, $z\geqslant 0$.

539. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}\right]^9=\frac{xyz}{h^3}$.

540. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}\right]^3=\frac{z}{h}$.

541. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}\right]^4=\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}$.

542. $\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}\right]^6=\frac{z}{h}$.

543. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}\right)^2+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

544. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^7=\sqrt{\frac{x}{h}}+\sqrt{\frac{y}{k}}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

545. $\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}\right)^8=\frac{z}{h}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Вычислить **моменты инерции однородных тел** с массою M, ограниченных поверхностями:

546. $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=c$—относ. **осей координат**.

547. $x^2+y^2=\frac{R^2}{H^2}z^2$, $z=H$, $z=0$—относ. $0z$.

548. $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=z^2\mathrm{tg}^2\alpha$, $z\geqslant 0$—относ. $0z$.

549. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$—относ. $0z$.

550. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$—относ. осей координат.

551. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$—относ. $0z$.

552. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$—относ. $0z$.

Вычислить **координаты центра инерции однородных тел**, ограниченных поверхностями:

553. $z^2=xy,\ x=a,\ y=b,\ z=0.$

554. $z=c\cdot\frac{a-x}{a}\cdot\frac{b-y}{b},\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

555. $x^2+y^2=\operatorname{tg}^2\alpha\,.\,z^2,\ z=c.$

556. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=a\ (a-2z).$

557. $x^2+y^2=az,\ z=a.$

558. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=\operatorname{tg}^2\alpha\,.\,z^2,\ z\geqq 0.$

559. $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

560. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z.$

561. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2\frac{z}{c}.$

562. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2} z\geqslant 0.$

563. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

564. $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=-1,$
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=-1,\ z=0.$

565. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

566. $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}+\sqrt{\frac{z}{c}}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

567. Вычислить $\iiint xdxdydz$, распространенный по объему, который определяется условиями: $(x^2+y^2+z^2)^2\leqslant a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$, $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0.$

568. При помощи системы координат: $u = \frac{yz}{x}$, $v = \frac{zx}{y}$, $w = \frac{xy}{z}$ найти объем, ограниченный поверхностями: $yz = ax$, $yz = a_1 x$ $(a > a_1)$, $zx = by$, $zx = b_1 y$ $(b > b_1)$, $xy = cz$, $xy = c_1 z$ $(c > c_1)$.

569. Доказать, что для ортогональной системы координат u, v, w, определяемой уравнениями $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \omega(u, v, w)$, элемент объема имеет выражение $LMN\, du dv dw$ и элемент поверхности $u = u_0$ имеет выражение $(MN)_{u=u_0}\, dv dw$, где $L^2 = \varphi'^2_u + \psi'^2_u + \omega'^2_u$, $M^2 = \varphi'^2_v + \psi'^2_v + \omega'^2_v$, $N^2 = \varphi'^2_w + \psi'^2_w + \omega'^2_w$.

570. Рассмотреть систему: $x = \frac{au \cos\psi}{u^2 + v^2}$, $y = \frac{au \sin\psi}{u^2 + v^2}$, $z = \frac{-av}{u^2 + v^2}$, проверить ее ортогональность и вычислить: 1) объем, ограниченный поверхностями $u = u_0$, $v = 0$, $v = v_0$ $(u_0 > 0, v_0 > 0)$; 2) часть поверхности $u = u_0$, выделенную поверхностями $v = 0$, $v = v_0$.

571. Рассмотреть систему: $x = a \sin u\, sh v \cos\psi$, $y = a \sin u\, sh v \sin\psi$, $z = a \cos u\, ch v$, проверить ее ортогональность и вычислить: 1) объем, ограниченный поверхностями $v = v_0$ $(v_0 > 0)$, $u = u_0$ $\left(0 < u_0 < \frac{\pi}{2}\right)$; 2) часть поверхности $v = v_0$, вырезаемую поверхностью $u = u_0$.

572. Рассмотреть систему: $x = \frac{a\, sh\, u \cos\psi}{ch\, u - \cos v}$, $y = \frac{a\, sh\, u \sin\psi}{ch\, u - \cos v}$, $z = \frac{-a \sin v}{ch\, u - \cos v}$, проверить ее ортогональность и вычислить: 1) объем, ограниченный поверхностями $u = u_0$, $v = 0$, $v = v_0$ $(u_0 > 0$, $0 < v_0 < \pi)$; 2) часть поверхности $u = u_0$, вырезаемую поверхностями $v = 0$, $v = v_0$.

573. Вычислить для точек оси z $P(0, 0, z)$ потенциальную функцию однородной сплошной полусферы: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geq 0$, т. е. вычислить распространенный по объему полусферы тройной интеграл $\iiint \frac{\gamma d\omega}{\rho}$, где γ означает плотность вещества полусферы, $d\omega$ — элемент ее объема и ρ — расстояние этого элемента до точки P.

574. Вычислить для точек оси z $P(0, 0, z)$ потенциальную функцию неоднородной сплошной сферы: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, если плотность γ (см. 573) $= k \cdot |z|$, т. е. пропорциональна расстоянию точки до плоскости XOY.

575. Тот же вопрос при $\gamma = k \cdot z^2$.

576. Тот же вопрос при $\gamma = f(\rho)$, где ρ расстояние точки до центра сферы.

577. Вычислить для точек оси z P (0, 0, z) потенциальную функцию однородного сплошного эллипсоида вращения (растянутого) $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ $(a > b)$ (см. 573).

578. Тот же вопрос для сплющенного эллипсоида вращения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$.

ОТДЕЛ V.

Интегрирование дифференциальных уравнений.

Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

1. $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + y'\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) = 0.$

2. $x(2x^2+y^2) + y(x^2+2y^2)\cdot y' = 0.$

3. $3x^2 - y + y'(4y - x) = 0.$ **4**. $2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y} = y' \cdot \frac{x^2+y^2}{xy^2}.$

5. $3x^2 - 2x - y + y'(2y - x + 3y^2) = 0.$

6. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right) + y'(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \lg x) = 0.$

7. $\sin y + y\sin x + \frac{1}{x} + y'\left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right) = 0.$

8. $x^2 + xy' = 3x + y'.$ **9**. $\sqrt{1+y^2} + y'\sqrt{1+x^2} = 0.$

10. $(1+y^2) + y'(1+x^2) = 0.$ **11**. $(y^2+xy^2)\,y' + x^2 - yx^2 = 0.$

12. $\sqrt{1-y^2} + y'\sqrt{1-x^2} = 0.$ **13**. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$

14. $y(4x+3y^2) + xy'(3x+2y^2) = 0.$

15. $y(7+3y) - xy'(2+y) = 0.$ **16**. $y(6+5x^3) + xy'(1+x^3) = 0.$

17. $3y + 2x^2y^2 + y'(4x + 3x^3y) = 0.$

18. $y(5 + 3\sqrt{xy}) + xy'(2 + \sqrt{xy}) = 0.$

19. $3y - 4xy' + xy(5y - 7xy') = 0.$

20. $\sqrt{y^3}\,(4y+3xy')+\sqrt{x}\,(3y+2xy')=0.$
21. $3y+xy'+x^8y^5\,(5y+2xy')=0.$
22. $4x-3y+y'\,(2y-3x)=0.$
23. $ax^2+2bxy+cy^2+y'\,(bx^2+2cxy+fy^2)=0.$
24. $4x^2-xy+y^2+y'\,(x^2-xy+4y^2)=0.$
25. $3y^2-2xy-2x^2+y'\,(y^2-xy+x^2)=0.$
26. $4x^2+xy-3y^2+y'\,(-5x^2+2xy+y^2)=0.$
27. $-4y^2+5xy-6x^2+y'\,(y^2-2xy+6x^2)=0.$
28. $4x^3-x^2y-3xy^2-y^3+y'\,(x^3-2x^2y+xy^2+y^3)=0.$
29. $-x^2y+xy^2+3y^3+y'\,(-x^3-2x^2y-xy^2+y^3)=0.$
30. $ax^3+3bx^2y+cxy^2+fy^3+y'\,(bx^3+cx^2y+3fxy^2+gy^3)=0.$
31. $4x^2+3xy+y^2+y'\,(x^2+3xy+4y^2)=0.$
32. $2xy'\,(x^2+y^2)=y\,(y^2+2x^2).$ 33. $xy'=\sqrt{y^2-x^2}.$
34. $(y-xy')^2=x^2+y^2.$
35. $2x+2y-1+y'\,(x+y-2)=0.$
36. $3x+y-2+y'\,(x-1)=0.$ 37. $x-y+3+y'\,(3x+y+1)=0.$
38. $2x-4y+y'\,(x+y-3)=0.$ 39. $y'=e^{x-y+1}.$
40. $y'=\sin^2(x+y-1).$ 41. $y'^3=x-y+2.$
42. $y-2x-1+y'\,(x+2y+1)=0.$
43. $2x+y-4+y'\,(x+y-3)=0.$
44. $(x+y-1)\,y'^2=x+y+2.$
45. $(x+y-1)+y'\,(2x+3y+2)=0.$
46. $(x^2+2x-1)\,y'-(x+1)\,y=x-1.$
47. $x\lg x\cdot y'-y=x^3\,(3\lg x-1).$ 48. $(a^2-x^2)\,y'+xy=a^2.$
49. $(2x-1)\,y'-2y=\dfrac{1-4x}{x^2}.$ 50. $2xy'-y=3x^2.$
51. $y'\,(3x^2-2x)-y(6x-2)+\dfrac{2}{x}(9x-4)=0.$
52. $x\sin x\cdot y'+(\sin x-x\cos x)\cdot y=\sin x\cos x-x.$
53. $xy'-(x+1)\,y=x^2\,(1-x).$
54. $x\,(x^3+1)\,y'+(2x^3-1)\,y=\dfrac{x^3-2}{x}.$
55. $x\lg x\cdot y'-(1+\lg x)\,y+\dfrac{1}{2}\sqrt{x}\,(2+\lg x)=0.$
56. $x\,(x-1)\,y'+y=x^2\,(2x-1).$ 57. $y=xy'+x^2.$

58. $y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2 - a^2}$.

59. $3xy' - 2y = \frac{x^3}{y^2}$.

60. $8xy' - y = -\frac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$.

61. $2\sin x \cdot y' + y \cdot \cos x = y^3 (x\cos x - \sin x)$.

62. $x^2y' + 2x^3y = y^2 (1 + 2x^2)$.

63. $3x(x+1)y' + (2x+1)y = \frac{1}{2}y^4\sqrt{x}(3x+1)$.

64. $xy^2y' - y^3 = \frac{1}{3}x^4$.

65. $xyy' - y^2 = x^4$.

66. $y' + y\frac{x + \frac{1}{2}}{x^2 + x + 1} = \frac{(1 - x^2)y^2}{(x^2 + x + 1)^{3/2}}$.

67. $3y' + y\frac{x^2 + a^2}{x(x^2 - a^2)} = \frac{1}{y^2} \cdot \frac{x(3x^2 - a^2)}{x^2 - a^2}$.

68. $2y'(x^2 + a^2) - xy + xy^3(3x^2 + 2a^2) = 0$.

69. $x^2 - y^2 + 2xyy' = \frac{1}{x}(xy' - y)$.

70. $x^2(x - yy') = xy' - y$.

71. $y^2 + x^2y' = xy' - y$.

72. $x^2(1 + y') = xy' - y$.

73. $x^2 + 2y^2 - xyy' = xy' - y$.

74. $x + yy' = \frac{1}{x}(xy' - y)$.

75. $x^2 + y'^2 = x^4$.

76. $x = \lg y' + \sin y'$.

77. $x = y' + \arcsin y'$.

78. $x = y'^2 + e^{y'}$.

79. $x = y' + \sin y'$.

80. $2y' + \lg y' = x$.

81. $x = y'^2 - 2y' + 2$.

82. $y' = x^2 + y'^2$.

83. $y^3 + y'^3 = 1$.

84. $y'^4 - y^4 = 1$.

85. $y - \arcsin y' + \lg(1 + y'^2)$.

86. $y = \frac{1}{y'} + y'^2 \cdot e^{y'}$.

87. $y = y'(1 + y' \cdot \cos y')$.

88. $y = a\left(y'^2 + \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}\right)$.

89. $2y\sqrt{y'} = y' + 1$.

90. $2y'^3 + y'^2 - y = 0$.

91. $yy' = y^3 + y'^3$.

92. $yy'^2 = y^4 - y'^4$.

93. $2y^2 - 3yy' + y'^2 = y + y'$.

94. $xy'^2 + (2x^2 - y)y' - 2xy = 0$.

95. $y'^2 - (x+1)yy' + xy^2 = 0$.

96. $xyy'^2 - (x^2 + y^2)y' + xy = 0$.

97. $y\sqrt{1 + y'^2} = k(xy' - y)$.

98. $y^2 - 2xyy' + y'^2(a^2 + x^2) = 0$. 99. $y - xy' = \frac{a}{2y'}$.

100. $y - xy' = \frac{a}{y'^2}$. 101. $y - xy' = \frac{ay'}{\sqrt[4]{y'^4+1}}$.

102. $y - xy' = \frac{ay'}{y'-1}$. 103. $(y - xy' + ay')^2 = a^2(1 + y'^2)$.

104. $(y - xy')^2 = a^2y'^2 + b^2$. 105. $y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1+y'^2}}$.

106. $y = xy' + y'^2$. 107. $y = xy' + a\sqrt{1+y'^2}$.

108. $y = x - 2\operatorname{arc\,tg} y'$. 109. $y = 2x + \lg y'$.

110. $y = x + \arcsin y'$. 111. $y = \frac{x + y'^2}{\sqrt{y'}}$.

112. $y = 2xy' + \lg y'$. 113. $y = \frac{3}{2}xy' + y'^k$ (k не $= -2$).

114. $y = \frac{3}{2}xy' + \frac{1}{y'^2}$. 115. $y = 2xy' + \sin y'$.

116. $y = 2xy' + \operatorname{arc\,tg} y'$. 117. $y = 2xy' + \arcsin y'$.

118. $y = \frac{3}{2}xy' + e^{y'}$. 119. $y = \frac{3}{2}xy' + \sqrt{1+y'^2}$.

120. $y = 2xy' + \lg(1 + y')$.

121. $y = 2xy' + \log(y' + \sqrt{1+y'^2})$. 122. $y = xy'^2 + y'^3$.

123. $y = y'^2 - \frac{3}{2}xy'$. 124. $y = \frac{1}{2}y'^2 + xy' - x^2$.

125. $y = y'^2 + \frac{1}{2}xy' - x^2$. 126. $y = 2y'^2 \frac{1}{2}xy' - x^2$.

127. $4x^4 = y'^2(7x^2 - 6y)$. 128. $6y = y'^2 + 2x^2$.

129. $x(y - y'^2) = y'^3$. 130. $y = xy' - y'y'$.

131. $xy' = 1 + yy'^2$. 132. $xy'^2 = 2 - \frac{1}{2}yy' - y^2y'^2$.

133. $xy'^2 = 1 - \frac{3}{2}yy'$. 134. $x = \frac{1}{2y'^2} - y^2$.

135. $xy'^2 = 1 + \frac{1}{2}yy' - y^2y'^2$. 136. $xy'^2 = \frac{1}{2} + yy' - y^2y'^2$.

137. $y''^2 - 5y' + 6 = 0$. 138. $y''^2 - 2y''y' + 3 = 0$.

139. $y'' = (1+y'^2)^{3/2}$.
140. $y''^2 + y'^2 = y'^4$.
141. $y''^2 + y'''^2 = 1$.
142. $3(y'' + y'''^2) = 2y'''^3$.
143. $y''(1+2\lg y') = 1$.
144. $y''(y'+2)e^{y'} = 1$.
145. $y'y''(2y'+3) = (1+y')^2$.
146. $y''y^3 = 1$.
147. $2y''y^2 = 1$.
148. $4y'' = \dfrac{1}{\sqrt{y}}$.
149. $3y'' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y}}$.
150. $xy''' - y'' = x^2$.
151. $xy'' - (1+4x^2)y' = 2(1+4x^2)$.
152. $xy'^2y'' - y'^3 = \dfrac{1}{3}x^4$.
153. $\sqrt{1-x^2}\,y'' + \sqrt{1-y'^2} = 0$.
154. $xy''' - y'' = \sqrt{x^2+y''^2}$.
155. $x^4y''' + 2x^3y'' = 1$.
156. $(x-1)y''' + 2y'' = \dfrac{x+1}{2x^2}$.
157. $2y'''x - y'' = \dfrac{y''^3}{x^2}$.
158. $yy'' - y'^2 = y^2y'$.
159. $yy'' - y'^2 = y^4$.
160. $yy'' + y'^2 = 1$.
161. $y'' + 6yy'^3 = 0$.
162. $y'' = y'(1+y'^2)$.
163. $y'' = y'^2$.
164. $yy'' - y'^2 = y'$.
165. $2yy'' = 1 + y'^2$.
166. $3yy'y'' = 1 + y'^3$.
167. $yy''' - y''^2 = ay'^3$.
168. $(1+y)y'' = y'^2$.
169. $(1+y^2)y'' = y'(1+y'^2)$.
170. $y^3(y'y''' - y''^2) + 3y^2y'^2y'' = y'^3$.
171. $y''y'^2 = y^3$.
172. $(1+y^2)y'' + 2yy'^2 = y'$.
173. $y''\sqrt{1-y^2} = y'\sqrt{1-y'^2}$.
174. $yy'' = y'(y' + \sqrt{y^2+y'^2})$.
175. $yy'' = y'\sqrt{1+y'^2}$.
176. $yy'' + y'^2 = \dfrac{y'}{y^2}$.
177. $y'y''' - y''^2 = y'^4$.
178. $y'^2 = y''(y'^3 + 2y)$.
179. $y'^2 = y''(y + 1 - \lg y')$.
180. $y'^2 = y''(y + 2y'^3)$.
181. $y'^2 = y''(2y + y'^3 \cos y')$.
182. $3y''^2 - y'y''' = y'^5\varphi(y)$.
183. $2x(yy'' - y'^2) - yy' = 9x^2y^2$.

184. $(2x-1)(y'^2 - yy'') + 2yy' = \dfrac{y^2}{x^2}(1-4x)$.

185. $(yy'' - y'^2)(3x^2 - 2x) - yy'(6x-2) + \dfrac{y^2}{x}(18x-8) = 0$.

186. $x^2(yy'' - y'^2) - xyy' + 6y^2 = 0$.

187. $3xy'^2(yy'' - y'^2) - 3yy'^3 = (xy)^4$.

188. $xy'(yy'' - y'^2) - yy'^2 = x^4y^3$.
189. $yy'' + y'^2 = 0$.

190. $yy'' - y'^2 = yy' \cot x$. **191**. $yy'' - y'^2 = \frac{2yy'}{x}$.

192. $yy'' - y'^2 = \frac{6x\, yy'}{3x^2 - 1}$. **193**. $yy'' - y'^2 = \frac{y^2 + y'^2}{1 + x^2}$.

194. $y^2 y''' - 3yy'y'' + 2y'^3 + \frac{y}{x}(yy'' - y'^2) = \frac{y^3}{x^2}$.

195. $yy'' - y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}}$. **196**. $yy'' - y'^2 = \frac{y'}{x}(y + y')$.

197. $x(yy'' - y'^2) + 2yy' = \frac{y^2}{\sqrt{1 + x^2}}$.

198. $yy'' - y'^2 = y\sqrt{y^2 - y'^2}$. **199**. $yy'' - y'^2 = \frac{y'^2}{(1 + x)^2}$.

200. $x(yy'' - y'^2) = y(y' + \sqrt{x^2 y^2 + y'^2})$.

201. $y^2 y''' - 3yy'y'' + 2y'^3 = y^2 y'$.

202. $x(yy'' - y'^2) + yy' = \frac{y'^2}{x}$.

В задачах 203—214 требуется проинтегрировать линейные уравнения 2-го порядка, зная частное решение u_1 уравнения без последнего члена:

203. $(1 + x^2)y'' + xy' - y + 1 = 0 : u_1 = x$.

204. $(2x^2 + 3x + 1)y'' + 2xy' - 2y + 2 = 0 : u_1 = x$.

205. $(4x^2 - x)y'' + 2(2x - 1)y' - 4y = 12x^2 - 6x : u_1 = \frac{1}{x}$.

206. $y'' - y' + ye^{2x} = xe^{2x} - 1 : u_1 = \sin(e^x)$.

207. $x^4 y'' + x^2(2x + 3)y' + 2y = \frac{2 - 3x}{x} : u_1 = e^{\frac{1}{x}}$

208. $x(x - 1)y'' - (2x - 1)y' + 2y = x^2(2x - 3) : u_1 = x^2$.

209. $x(4x + 3)y'' + 2(2x + 3)y' - 4y = 6x(2x + 3) : u_1 = \frac{1}{x}$.

210. $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = \frac{\cos x}{x} - \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\sin x : u_1 = x$.

211. $y'' - \frac{x \sin x}{\sin x - x\cos x}y' + \frac{\sin x}{\sin x - x \cos x}y =$

$= \frac{2(x^2 \sin x - x \operatorname{cs} x + \sin x)}{x^3(\sin x - x\cos x)} : u_1 = x$.

212. $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = \frac{2(x^2+x-1)}{x^3(x-1)}$: $u_1 = e^x$.

213. $y'' + \frac{1+2\lg x}{x(1+\lg x)}y' - \frac{1}{x^2(1+\lg x)}y = \frac{2\lg x}{x(1+\lg x)}$: $u_1 = \lg x$.

214. $y'' + \frac{4x^2+1}{2x(2x+1)}y' - \frac{2x-1}{2x(2x+1)}y = \frac{2x^2+x+1}{2x(2x+1)}$: $u_1 = \sqrt{x}$.

215. $y'' - y = x \operatorname{ch} x$.

216. $y'' + y = x^2 \sin x$.

217. $y'' - 3y' + 2y = xe^x$.

218. $y''' - y = \sin x$.

219. $y''' - y'' + y' - y = x^2 + x$.

220. $y^{IV} - y'' = 1 + 2 \operatorname{ch} x$.

221. $y^{IV} + 16y = 3x + 1$.

222. $y^{IV} - 2y'' + y = \cos x$.

223. $y^{IV} + 8y'' + 16y = xe^{-x} - e^x \sin 2x$.

224. $y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 16y' + 16y = \frac{1}{3}e^{2x} - \cos 2x$.

225. $y^{IV} + 3y''' + 4y'' + 3y' + y = \frac{1}{2}e^{-x} - \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

226. $y^{IV} + 14y'' + 49y = xe + \sin x$.

227. $y^{IV} + 4y''' + 8y'' + 16y' + 16y = 2e^{-2x} - \sin 2x$.

228. $y^{IV} + 12y'' + 36y = xe^{2x} - e^{-x} \sin(x\sqrt{6})$.

229. $y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{1}{2}\cos x$.

230. $y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = xe^{-x} + 3\cos 2x$.

231. $y^{V} + 4y''' = 1 + 3\sin 2x$.

232. $y^{V} - y^{IV} = xe^x - 1$.

233. $y^{VI} + y = x$.

234. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

235. $y'' - y' = \frac{1}{e^x + 1}$.

236. $y'' + y' = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$.

237. $y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$.

238. $y''' + y'' + y' + y = \frac{2(\sin x - 3\cos x)}{\sin^4 x}$.

239. $2y'' + y(3y' + 2)^3 = 0$.

240. $x^4 y'' + 2x^3 y' - 4y = x^3 - 2x$.

241. $x^4 y'' - c^2 y = 0$.

242. $xy'' + y' = 0$.

243. $x^2 y'' + xy' + y = 2x$.

244. $(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + 4y + 2 = 0$.

245. $(x-4)^3 y''' - 6(x-4)^2 y'' - 8(x-4) y' + 10y = (x-4)^2 \lg(x-4).$

246. $(2x+3)^3 y''' + 6(2x+3)^2 y'' + 4(2x+3) y' + 8y = \sin \lg(2x+3).$

247. $(x+1)^3 y''' - 3(x+1)^2 y'' + 4(x+1) y' - 4y = (x+1) \lg(x+1).$

248. $(2x-1)^3 y''' + 6(2x-1)^2 y'' + 4(2x-1) y' + 8y = \frac{\lg(2x-1)}{2x-1}.$

249. $x^3 y''' + x^2 y'' - 3xy' + y = 2 + \frac{\lg x}{x}.$

250. $(x+2)^3 y''' + 3(x+2)^2 y'' + (x+2) y' + y = \frac{\lg(x+2)}{x+2}.$

251. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = e^x (x^2 - 2x + 2).$

252. $x^2 y'' + xy' - y = x \cos x - (x^2+1) \sin x.$

253. $4x^2 y'' + 4xy' - y = \frac{1}{\cos^3 x}\left\{8x^2 \sin x + 4x \cos x - \sin x \cos^2 x\right\}.$

254. $\frac{dx}{dt} = 3 - 2y.$ $\frac{dy}{dt} = 2x - 2t$

255. $\frac{dx}{dt} = 3x - \frac{1}{2}y - 3t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{2}.$ $\frac{dy}{dt} = 2y - 2t - 1.$

256. $\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t} + y + 3t - \sin t.$ $\frac{dy}{dt} = -\frac{2}{t^2}x + \frac{1}{t}y + 2 + \cos t - \frac{\sin t}{t}.$

257. $\frac{dx}{dt} = x - e^{2t} y - t + \frac{1}{t} e^{2t} + 2.$ $\frac{dy}{dt} = x \cdot e^{-2t} - y + (1-t) e^{-2t} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}.$

258. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{y^3}.$ $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^3}.$

259. $\frac{dx}{dt} = z.$ $\frac{dy}{dt} = x.$ $\frac{dz}{dt} = y.$

260. $\frac{dx}{dt} = y + z.$ $\frac{dy}{dt} = z + x.$ $\frac{dz}{dt} = x + y.$

261. $\frac{dx}{dt} = 4y + z.$ $\frac{dy}{dt} = z.$ $\frac{dz}{dt} = 4y.$

262. $\frac{dx}{dt} = y + z.$

$\frac{dy}{dt} = 3x + z.$

$\frac{dz}{dt} = 3x + y.$

263. $t\frac{dx}{dt} = 4x + y + 2z - \sin t - 2\cos t.$

$t\frac{dy}{dt} = -2x + y - 2z - \sin t + 2\cos t + t\cos t.$

$t\frac{dz}{dt} = -x - y + z + \sin t - \cos t - t\sin t.$

264. $3t\frac{dx}{dt} = (t+1)x - y + tz.$

$3t\frac{dy}{dt} = (t-2)x + 2y + tz.$

$3t\frac{dz}{dt} = (2t - \ )x + y + 2tz.$

265. $\frac{dx}{dt} = 2x + y - 2z - t + 2.$

$\frac{dy}{dt} = 1 - x.$

$\frac{dz}{dt} = x + y - z - t + 1.$

266. $\frac{dx}{dt} = 8y.$

$\frac{dy}{dt} = -2z.$

$\frac{dz}{dt} = 2x + 8y - 2z.$

267. $\frac{dx}{dt} = y - z - t + 3.$

$\frac{dy}{dt} = 7 - 2z.$

$\frac{dz}{dt} = 2y - 2t.$

268. $3t\frac{dx}{dt} = 2x + y - z.$

$2t\frac{dy}{dt} = x + 3y + z.$

$6t\frac{dz}{dt} = -x + 7y + 5z.$

269. $\frac{dx}{dt} = 2x - y + z.$

$\frac{dy}{dt} = x + z.$

$\frac{dz}{dt} = -3x + y - 2z.$

270. $\frac{dx}{dt} = -2x - 2y - 4z.$

$\frac{dy}{dt} = -2x + y - 2z.$

$\frac{dz}{dt} = 5x + 2y + 7z.$

271. $\frac{dx}{dt} = x + y + z.$

$\frac{dy}{dt} = y + z.$

$\frac{dz}{dt} = x.$

272—285. В этих задачах требуется найти общий интеграл уравнения с частными производными и такое частное решение, которое удовлетворяет специальным условиям, приписанным в скобках.

272. $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$ (при $x = a$, $z = y^2 + a^2$).

273. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=y^2-x^2.$ (при $y=a,\ z=x^2-a^2$).

274. $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2.$ (при $x=a,\ z=1+2y+3y^2$).

275. $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}.$ (при $x=1,\ z=\log y+\sqrt{1-y^2}$).

276. $(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+1)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y.$

277. $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2.$

278. $(y^2-2x^2)\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=x^2.$

279. $2y\frac{\partial z}{\partial x}+(x+y^2)\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y^3}{z}.$

280. $y^2\frac{\partial v}{\partial x}-xy\frac{\partial v}{\partial y}+xz\frac{\partial v}{\partial z}=y^2-xy+xz$ (при $z=1,$
$v=x^2+xy+y^2$).

281. $x\frac{\partial v}{\partial x}-y\frac{\partial v}{\partial y}-z\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{2x}{z}$ $\left(\text{при } z=1,\ V=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)$.

282. $y\frac{\partial v}{\partial x}-x\frac{\partial v}{\partial y}+x\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{y^2z-x^2z-x^2y}{z^2}$ (при $x=1,\ v=y^2+z^2$).

283. $x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}+z\frac{\partial v}{\partial z}=2(x^2+y^2+z^2)$ (при $x=1,\ v=(y+z)^2$).

284. $x\frac{\partial v}{\partial x}+4y\frac{\partial v}{\partial y}+2z\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{x^2-2z^2}{\sqrt{x^2-z^2}}$ (при $z=1,\ v=x^2+y^2$).

285. $x\frac{\partial v}{\partial x}-(x+z)\frac{\partial v}{\partial y}+z\frac{\partial v}{\partial z}=x\,(2yz-xz-z^2)\cos(xyz).$

286—291. Найти кривые, для которых длина дуги S, отсчитываемая от данной точки, представляется заданной функцией от координат x, y конца дуги:

286. От т. $(0,0)$ $S=x+\sqrt{ay}.$ **287.** От т. (a,a) $S=x-\frac{a^2}{y}.$

288. От т. $\left(0,\frac{\pi a}{2}\right)$ $S=x-a\cos\frac{y}{a}.$ **289.** От точки (a,a) $S=y-\frac{x^3}{a^2}.$

290. От т. $(a, -a)$ $S = y + \frac{x^2}{a}$.

291. От т. (a, a) $S = 2a - \sqrt{2(x^2 + y^2)}$.

292—296. Найти кривые, для которых длина дуги между любыми двумя точками: $S_1 - S_0$ равна разности двух значений некоторой функции координат,—значений, отвечающих концу и началу дуги:

292. $S_1 - S_0 = \frac{y_1^2 - y_0^2}{a}$. **293.** $S_1 - S_0 = a \log \frac{y_1}{y_0}$.

294. $S_1 - S_0 = \sqrt{ay_1} - \sqrt{ay_0}$. **295.** $S_1 - S_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}(y_1^{3/2} - y_0^{3/2})$.

296. $S_1 - S_0 = \frac{y_1^2}{T_1} - \frac{y_0^2}{T_0}$, где T длина касательной.

297—300. Найти кривые в полярных координатах, для которых длина дуги между любыми двумя точками $S_1 - S_0$ равна разности следующих отрезков, построенных для конца и начала дуги (T — полярная длина касательной, N — пол. дл. нормали, S_t — пол. подкасательная, P_t — длина перпендикуляра, опущенного из полюса на касательную):

297. $S_1 - S_0 = T_1 - T_0$. **298.** $S_1 - S_0 = N_1 - N_0$.

299. $S_1 - S_0 = (S_t)_1 - (S_t)_0$. **300.** $S_1 - S_0 = (P_t)_1 - (P_t)_0$.

301—307. Найти кривые, для которых площадь Q, ограниченная кривою, осью абсцисс и двумя ординатами: $X = x_0$, $X = x$, представляется данною функциею от координат (x, y):

301. $Q = a^2 \log \frac{y}{a}$, $x_0 = 0$. **302.** $Q = \frac{y^3}{a}$, $x_0 = 0$.

303. $Q = \frac{xy^3}{a^2}$, $x_0 = a$. **304.** $Q = bx - ay$, $x_0 = 2a$.

305. $Q = \frac{a^2 x}{y}$, $x_0 = a$. **306.** $Q = y \cdot S_t$, $x_0 = -\infty$.

307. $Q = a \cdot S$, $x_0 = 0$, S (длина дуги) считается от точки $(0, a)$.

308—314. Найти кривые, для которых площадь сектора Q, ограниченного кривою и радиусами векторами $\theta = \theta_0$ и $\theta = \theta$, выражается данною функциею координат r, θ:

308. $Q = \frac{1}{2} ar\theta$, $\theta_0 = 0$. **309.** $Q = \frac{1}{4} r^2\theta$, $\theta_0 = 0$.

310. $Q=\frac{1}{2}\frac{r^3\theta}{a}$, θ_0 не 0. **311.** $Q=\frac{1}{2}(r^2-a^2\theta)$, $\theta_0=0$.

312. $Q=\frac{a}{2}(r-a\theta)$, $\theta_0=0$. **313.** $Q=\frac{r^3}{a}$, θ_0 произвольно.

314. $Q=\frac{1}{2}rS_t-\left(\frac{1}{2}rS_t\right)_0$, θ_0 произвольно, S_t — полярная подкасательная.

315—317. Найти кривые, для которых объем вращения V_x около оси x или поверхность вращения S_x около оси x представляются данными функциями координат x, y, при чем часть кривой берется между ординатами $X=x_0$, $X=x$:

315. $V_x=\frac{1}{k}\pi xy^2$, $x_0=0$. **316.** $V_x=\pi y^2S_t$, $x_0=-\infty$.

317. $S_x=2\pi yT$, $x_0=-\infty$ (S_t—подкасат., T—длина касательной).

318—341. Найти кривые, для которых отрезки, отсекаемые касательною на осях координат (X_t, Y_t), или отрезки, отсекаемые нормалью на осях координат (X_n, Y_n), имеют следующие выражения:

318. $X_n=x+a$. **319.** $X_n=\frac{x^2}{a}$. **320.** $X_n=\sqrt{ax}$.

321. $X_n=\frac{x^3}{x^2+y^2}$. **322.** $X_n=\frac{2(x^2+y^2)}{x}$. **323.** $X_n=\frac{x^2+y^2}{a}$.

324. $Y_n=\sqrt{x^2+y^2}$. **325.** $Y_n=\frac{x^2+y^2}{2a}$. **326.** $Y_n=x$.

327. $Y_n=\sqrt{x^2+y^2-a^2}$. **328.** $X_t=\frac{x^2}{a}$. **329.** $X_t=x+a\cot\frac{x}{a}$.

330. $X_t=\frac{x^3}{a^2}$. **331.** $X_t=\frac{y^2}{a}$. **332.** $X_t=\frac{x^3}{ay}$.

333. $X_t=\frac{x^2+y^2}{y}$. **334.** $Y_t=\frac{x^2}{a}$. **335.** $Y_t=x$.

336. $Y_t=\frac{xy}{a}$. **337.** $Y_t=\frac{\sqrt{xy^3}}{a}$. **338.** $Y_t=\frac{y^2}{x}$.

339. $Y_t=\frac{y^2}{a}$. **340.** $Y_t=S_n$ (поднормаль). **341.** $Y_t\cdot S_n=ay$.

342—378. Найти кривые в прямоугольной системе, обладающие следующими свойствами (S_t—подкасательная, S_n—поднормаль, T—длина касательной, N—длина нормали, L_t и L_n—отрезки касательной и нормали, заключенные между осями координат, P_t, P_n—перпендикуляры, опущенные из начала на касательную и нормаль):

342. $S_n = 3y-2x$. **343.** $N \cdot T = 2xy$. **344.** $N \cdot T = 2y\sqrt{x^2+y^2}$.

345. $P_t = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{k}$. **346.** $P_t \cdot N = a^2 - y^2$. **347.** $X_t^k + Y_t^k = a^k$.

348. $X_t \cdot Y_t = 4a^2$. **349.** $L_t = N$. **350.** $\frac{1}{X_t^2} + \frac{1}{Y_t^2} = \frac{1}{a^2}$.

351. $x \cdot T = y \cdot N$. **352.** L_n делится точкой (x, y) пополам.

353. L_t делится точкой (x, y) пополам.

354. L_t делится точкой (x, y) в отношении $m : n$ (от оси x к y).

355. L_t делится пополам в точке пересечения с параболой $y^2 = 2px$.

356. $T = a$. **357.** $N^2 + T^2 = a^2$. **358.** $N \cdot T = ay$.

359. $N + T = \frac{y^2}{a}$ **360.** $\frac{1}{N} + \frac{1}{T} = \frac{x}{ay}$. **361.** $N \cdot S_n = a^2$.

362. $N \cdot T = xy$. **363.** $N^2 + T^2 = x^2$. **364.** $N + S_n = a$.

365. $N \cdot T = aS_n$. **366.** $\frac{1}{N} + \frac{1}{S_n} = \frac{1}{a}$. **367.** $\frac{1}{N} + \frac{1}{T} = \frac{1}{a}$.

368. $X_n \cdot Y_n = NT$. **369.** $P_n = a$. **370.** $\frac{1}{X_n} + \frac{1}{Y_n} = \frac{1}{a}$.

371. $L_n = T$. **372.** $N = x$. **373.** $T = x$.

374. $T^2 = xy$. **375.** $L_t = L_n$. **376.** $P_n + x$.

377. $P_n \cdot N = a \cdot S_n$. **378.** $L_n = a$.

379—390. Найти кривые в полярных координатах, обладающие следующими свойствами (N, T—длина нормали и касательной, S_n, S_t—поднормаль и подкасательная, P_t—перпендикуляр из полюса на касательную):

379. $N = a$. **380.** $T \cdot S_n = a^2$. **381.** $P_t = \frac{r^2}{a}$.

382. $T = a$. **383.** $S_t = \sqrt{a^2 - r^2}$. **384.** $N^2 + T^2 = a^2$.

385. $N+T=a.$ **386.** $N\cdot T=a^2.$ **387.** $\frac{1}{N}+\frac{1}{T}=\frac{1}{a}.$

388. $T=\frac{r^2}{a}.$ **389.** $N\cdot S_t=a^2.$ **390.** $N=\frac{r^3}{a^2}.$

391—411. Найти кривые, у которых радиусы кривизны R имеют следующие выражения через координаты x, y, через отрезки N, T, S_n, S_t (длина нормали и касательной, поднормаль, подкасательная) и угол α касательный с осью x:

391. $R=5\sqrt[5]{ax^4}$, при чем касательная в точке $(0, 0)$ есть ось x.

392. $R=4\sqrt[4]{ay^3}$ и касат. в точке $(0,0)$—ось x.

393. $R=3\sqrt[3]{ax^2}$ и касат. в точке $(0,0)$—есть x.

394. $R=k\cdot N.$ **395.** $R^2y^2=x^2(N^2+T^2).$ **396.** $R=\frac{xN^3}{y^2}.$

397. $R=\frac{T^2}{y}.$ **398.** $R=\frac{Tx}{y}.$ **399.** $R=\frac{NT^2}{y^2}.$

400. $R=\frac{xTN^2}{y^3}.$ **401.** $R=\frac{yT}{S_n}.$ **402** $R=k\cdot\frac{y}{T}.$

403. $R=k\cdot\left(\frac{N}{S_n}\right)^3.$ **404.** $R=k\cdot\frac{S_n}{y}.$ **405** $R=k\cdot\frac{N}{y}.$

406. $R=k\cdot\frac{T}{y}.$ **407.** $R^2=N^2+T^2.$ **408.** $R=k\cdot\alpha.$

409. $R=k\cdot\alpha^2.$ **410.** $R^2=\frac{k^2}{\sin^3(2\alpha)}.$ **411.** $R^2=\frac{k^2}{\cos^2(2\alpha)}.$

412—421. Найти кривые, у которых радиус кривизны R представляется данною функциею от длины дуги s, при чем $s=0$ в точке, где $\alpha=0$.

412. $R=2\sqrt{as}.$ **413.** $R=3\sqrt[3]{as^2}.$ **414.** $R=a\,\mathrm{ch}\frac{s}{a}.$

415. $R=2a\,\mathrm{ch}\frac{s}{a}.$ **416.** $R=\frac{a^2+s^2}{a}$ **417.** $R=\sqrt{a^2-s^2}.$

418. $R=a\sqrt{e^{\frac{2s}{a}}-1}.$ **419.** $R=a+s.$ **420.** $R^2=a^2+s^2.$

421. $R=\sqrt{2as-4s^2}.$

422—434. Определить кривые в полярных координатах, у которых радиус кривизны представляется следующею функциею от радиуса вектора r и отрезков N, T, S_n, P_t, P_n (длина нормали, касательной, поднормаль, перпендикуляры—опущенные из полюса на касательную, и нормаль):

422. $R = \frac{1}{k}N$. **423.** $R = \sqrt{r^2 - a^2}$, при чем касательная в точке $(a, 0)$ есть полярная ось.

424. $R = P_t$. **425.** $R = \frac{NT}{r+T}$. **426.** $R = T$.

427. $R = S_n$. **428.** $R = P_n$. **429.** $R^2 = T^2 + N^2$.

430. $R = \frac{N^2}{r}$. **431.** $R = \frac{N^3}{r^2}$. **432.** $\frac{1}{R} = \frac{1}{T} + \frac{1}{N}$.

433. $R = \frac{NS_n}{r}$. **434.** $R = r$.

435—453. Найти изогональные траектории для данных систем кривых при переменном параметре a; угол $\omega = \frac{\pi}{2}$, в тех задачах, где значение его дано.

435. $y^2 + 2ax = a^2$ $(a > 0)$. **436.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$ (c пост., $a > c$).

437. $x^3 - 3xy^2 = a^3$. **438.** $\cos y = ae^{-x}$.

439. $(x^2 + y^2)^3 = a^3(x^3 - 3xy^2)$. **440.** $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 = a^5$.

441. $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = a^4$. **442.** $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

443. $ay^2 = x^3$. **444.** $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = a^2$.

445. $x^k + y^k = a^k$. **446.** $x^2 + y^2 = 2ay$.

447. $xy = a^2$. **448.** $x^2 - \frac{1}{3}y^2 = a^2$.

449. $r^k = a^k \sin k\theta$. **450.** $(x + x_0)^2 + y^2 = a(x^2 + y^2 - x_0^2)$.

451. $xy = \pm a^2$, $\omega = \frac{\pi}{4}$. **452.** $x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$, $\omega = \frac{\pi}{3}$.

453. $r^k = a^k \sin k\theta$ при произвольном угле ω.

454—471. Найти эвольвенты следующих кривых:

454. $x_c = a(t - \sin t)$. $y_c = a(1 - \cos t)$.

455. $x_c = \frac{p}{2}\operatorname{tg}^2 t$. $y_c = -p \operatorname{tg} t$.

456. $x_c = a\cos^3 t$. $y_c = a\sin^3 t$.

457. $x_c = \frac{a^2+b^2}{a}\operatorname{ch}^3 t.$
$y_c = -\frac{a^2+b^2}{b}\operatorname{sh}^3 t.$

458. $x_c = t - a\operatorname{sh}\frac{t}{a}\operatorname{ch}\frac{t}{a}.$
$y_c = 2a\operatorname{ch}\frac{t}{a}.$

459. $x_c = \frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t.$
$y_c = -\frac{a^2-b^2}{a}\sin^3 t.$

460. $x_c = -a\cos t\,(1+2\sin^2 t).$
$y_c = a\sin t\,(1+2\cos^2 t).$

461. $x_c = p + \frac{3}{2}p\cot^2 t.$
$y_c = -p\cot^3 t.$

462. $x_c = \frac{a^4+3t^4}{2t^3}.$
$y_c = \frac{3a^4+t^4}{2a^2 t}.$

463. $x_c = \frac{t(a^4-t^4)}{2a^4}.$
$y_c = \frac{5t^4+3a^4}{6a^2 t}.$

464. $x_c = a\cos t.$
$y_c = a\sin t.$

465. $x_c = ae^{-t}(\cos t+\sin t).$
$y_c = ae^{-t}(\sin t-\cos t).$

466. $x_c = 2a\,(t\cos t-\sin t).$
$y_c = 2a\,(t\sin t+\cos t).$

467. $x_c = -4at^3\left(t^2+\frac{5}{3}\right).$
$y_c = 5a\,(1+t^2)^2.$

468. $x_c = \frac{a}{3}\,(2\cos t+\cos 2t).$
$y_c = \frac{a}{3}\,(2\sin t+\sin 2t).$

469. $x_c = \frac{a}{2}\,(3\cos t+\cos 3t).$
$y_c = \frac{a}{2}\,(3\sin t+\sin 3t).$

470. $x_c = \frac{2a\cos^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}},\quad y_c = -\frac{2a\sin^3 t}{3\sqrt{\cos 2t}}.$

471. $x_c = \frac{a}{2}+\frac{a}{6}\,(2\cos t-\cos 2t),\ y_c = \frac{a}{6}\,(2\sin t+\sin 2t).$

472. Найти поверхность, которая пересекает ортогонально систему конусов $x^2+y^2=\alpha^2 z^2$ (α переменный параметр) и проходит через линию $y=h$, $x^2+z^2=2ax$.

473. Найти поверхность, которая пересекает ортогонально систему параболоидов $x^2+y^2=2\alpha z$ (α перем. параметр) и проходит через линию $x=h$, $z^2=2py$.

474. Найти поверхность, которая пересекает ортогонально систему сфер $x^2+y^2+z^2=\alpha^2$ (α перем. параметр) и проходит через линию $x=h$, $y^2+z^2=a^2$.

475. Найти поверхность, касательные плоскости которой ||-ны прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{1}$, и которая проходит через окружность $x=h$, $y^2+z^2=2gz$.

476. Найти поверхность, касательные плоскости которой проходят через точку $(b, 0, b)$ и которая проходит через окружность $y=h$, $x^2+z^2=a^2$.

477. Найти поверхность, нормали которой лежат в одной плоскости с прямою $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ и которая проходит через окружность $x^2+y^2=2ax$, $z=h$.

ОТДЕЛ VI.

Определенные интегралы.

1. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$. **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\sin x\,dx$. **3.** $\int_0^{\pi}x\log\sin x\,dx$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cot x\,dx$. **5.** $\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dx$. **6.** $\int_0^1\frac{\log x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

7. $\int_0^1\frac{x^2\log x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **8.** $\int_0^1\frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$. **9.** $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\cdot\log\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

10. $\int_0^{\infty}\frac{x^m\log x\,dx}{1+x^{2m+2}}$ $(m>-1)$. **11.** $\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{\sin x}dx$, ($n$ целое положит.).

12. $\int_0^{\pi}\frac{\sin nx\cos x}{\sin x}dx$ (n целое полож.). **13.** $\int_0^{\pi}\log\sin x\cdot\cos nx\,dx$ (n цел.).

14. $\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{\log x}dx$, $a>0$, $b>0$. **15.** $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\cos mx\,dx$ $(a>0, b>0)$.

16. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx\,dx \quad (a>0,\ b>0).$

17. $\int_0^\infty \left(\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\right)^2 dx \quad (a>0,\ b>0).$

18. $\int_0^\infty \log \frac{b^2 + x^2}{c^2 + x^2} \cdot \cos ax\,dx \quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$

19. $\int_0^\infty \left(e^{-\frac{a^2}{x^2}} - e^{-\frac{b^2}{x^2}}\right) dx \ (a>0, b>0).$

20. $\int_0^\pi e^{a\cos x} \cos(a\sin x)\,dx,\ a>0.$

21. $\int_0^\infty \frac{\sin bx - \sin cx}{x} e^{-ax}\,dx \quad (a>0,\ b>0,\ c>0).$

22. $\int_0^\infty \frac{\cos dx - \cos cx}{x} e^{-ax}\,dx \ (a>0).$

23. $\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{(1+x^2)^2},\ a>0.$

24. $\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{(1+x^2)^3},\ a>0.$

25. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} ax \cdot dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$

26. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} ax \cdot dx}{x(1+b^2x^2)},\ a>0,\ b>0.$

27. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(a\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,dx,\ a>0.$

28. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{arctg}\left(a\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}\right) dx.$

29. $\int_0^1 \frac{\log(x^2+a^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ a>0.$

30. $\int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2)}{1+b^2x^2}\,dx,\ a>0, b>0.$

31. $\int_0^1 \frac{\log(1+a^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

32. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\sin x)}{\sin x}\,dx.$

33. $\int_0^\pi \frac{\log(1+a\cos x)}{\cos x}\,dx, 0<a<1.$

34. $\int_0^{\pi}\frac{\log(1+a\sin x)}{\sin x}dx,\ 0<a<1.$ 35. $\int_0^{\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx, a>0, b>0.$

36. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)\,dx\ (a>0,\ b>0).$

37. $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx,\ b>a>0.$

38. $\int_0^{\infty}\frac{\sin^3(ax)}{x}dx,\ a>0.$ 39. $\int_0^{\infty}\frac{\sin^4(ax)}{x}dx,\ a>0.$

40. $\int_0^{\infty}\frac{\sin^5 ax)}{x^3}dx,\ a>0.$

41. $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\cos bx\cos cx}{x}dx\ (a>0,\ b>0,\ c>0).$

42. $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\sin bx}{x^2}dx,\ a>0,\ b>0.$

43. $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\sin bx\cos cx}{x^2}dx,\ (a>0,\ b>0,\ c>0).$

44. $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax\sin bx\cos cx}{x^3}dx,\ a\geqq b\geqq c>0.$ 45. $\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 ax}{x^3}dx,\ a>0.$

46. $\int_0^{\infty}\frac{\sin^4 ax}{x^4}dx, a>0.$ 47. $\int_0^{\infty}\frac{\sin ax}{x^5}dx,\ a>0.$

48. $\int_0^{\infty}e^{-ax}\frac{\sin bx\cos cx}{x}dx,\ (a>0,\ b>0,\ c>0).$

49. $\int_0^{\infty}e^{-ax}\frac{\sin^3(bx)}{x}dx\ (a>0,\ b>0).$

50. $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin^2 bx}{x^2}\,dx$, $a>0$, $b>0$. 51. $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin^2 bx}{x^2}\,dx$ $(a>0, b>0)$.

52. $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx \sin cx}{x^2}\,dx$ $(a>0,\ b\geqq c>0)$.

53. $\int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2)\cdot \operatorname{arc\,tg} bx\,dx}{x^3}$ $(a>0,\ b>0)$.

54. $\int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2)\log(1+b^2x^2)}{x^4}\,dx$, $a>0$, $b>0$.

55. $\int_0^\pi \log(1-2a\cos x+a^2)\,dx$.

56. $\int_0^\pi \cos nx\cdot\log(1-2a\cos x+a^2)\,bx$ (n цел. пол.).

57. $\int_0^\pi \frac{\log\sin x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$. 58. $\int_0^{2\pi} \frac{\sin mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$ (m целое).

59. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2}\cdot\frac{\sin bx}{1-2a\cos bx+a^2}$, $b>0$. 60. $\int_0^\pi \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}\,dx$.

61. $\int_0^\pi \frac{x\,dx}{1-2a\cos 2x+a^2}$. 62. $\int_0^{2\pi} \frac{x^2\sin x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$.

63. $\int_0^{2\pi} \frac{x\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$ (m цел. пол.).

64. $\int_0^\pi \frac{\sin mx\sin x\,dx}{1-2a\cos x+a^2}$ (m цел. пол.).

65. $\int_0^\pi \frac{\log\sin x\,dx}{1-a\cos x}$, $|a|<1$. 66. $\int_0^\pi \frac{\cos mx\,dx}{1-a\cos x}$ (m цел. пол., $|a|<1$).

67. $\int_0^{2\pi}\frac{\sin mx dx}{1-a\cos x}$ (m цел. пол., $|a|<1$). 68. $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x dx}{1-a\cos x}$, $|a|<1$.

69. $\int_0^{\pi}\log(1-a\cos x)\,dx$, $|a|<1$.

70. $\int_0^{\pi}\cos nx\cdot\log(1-a\cos x)\,dx$, $|a|<1$.

71. $\int_0^{2\pi}\frac{x dx}{1-a\cos 2x}$, $|a|<1$. 72. $\int_0^{2\pi}\frac{x\cos mx dx}{1-a\cos x}$ ($|a|<1$, m цел. пол.).

73. $\int_0^{2\pi}\frac{x^2\sin x dx}{1-a\cos x}$, $|a|<1$. 74. $\int_0^{\pi}\frac{\sin mx\sin x dx}{1-a\cos x}$ ($|a|<1$, m цел. пол.).

75. $\int_0^{\infty}\frac{x\sin bx dx}{(1+x^2)(1-a\cos bx)}$ ($|a|<1$, $b>0$).

76. $\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1-a\cos bx)}$ ($|a|<1, b>0$).

77. $\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}\log x dx}{1+x}$ ($0<a<1$). 78. $\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}\log^2 x dx}{1+x}$ ($0<a<1$).

79. $\int_0^{\infty}\frac{x^k\log x dx}{1+x^m}\left(m>0,\ 0<\frac{k+1}{m}<1\right)$.

80. $\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}dx}{x+b}$ ($0<a<1$, $b>0$).

81. $\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}\log x dx}{x+b}$ ($0<a<1, b>0$).

82. $\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}\log x dx}{(x+b^2)}$ ($0<a<1, b>0$). 83. $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[m]{1-x^m}}$ ($m>1$).

84. $\int_0^1 x^m(1-x^n)^p\,dx$ при $\frac{m+1}{n}=k$ (целому полож.), $p>-1$, $n>0$.

85. $\int_0^1 x^m(1-x^n)^p\,dx$ при $\frac{m+1}{n}+p=k$ (целому полож.), $0<p<1, n>0$.

86. $\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{(1-x)^p}$, $0<p<1$.

87. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^n x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$, $-1<n<+1$.

88. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} dx}\,dx$ $(-b<a<+b,\ b>0)$.

89. $\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sh} ax\,dx}{\operatorname{ch} bx}$ $(-b<a<b,\ b>0)$.

90. $\int_0^1 \frac{x^{n-1}\,dx}{(1+ax)(1-x)^n}$ $(0<n<1,\ 1+a>0)$.

91. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{2p-1} x\,dx$ $(0<p<1)$.

92. $\int_0^\infty \frac{x^k\,dx}{a+bx^m}$ $\left(a>0, b>0, 0<\frac{k+1}{m}<1\right)$.

93. $\int_0^\infty \frac{x^k\,dx}{(a+bx^m)^p}$ $\left(a>0, b>0, 0<\frac{k+1}{m}<1, p \text{ цел. полож.}\right)$.

94. $\int_0^\infty \frac{x^6\,dx}{(1+x^4)^3}$.

95. $\int_0^\infty \frac{x^6\,dx}{(1+x^8)^4}$.

96. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2m-1}x\cos^{2n-1}x\,dx}{(a\cos^2 x+b\sin^2 x)^{m+n}}$ $(a>0,\ b>0,\ m>0,\ n>0)$.

97. $\int_0^{\pi} \frac{\sin^{n-1} x dx}{(a+b\cos x)^n}$ $(a>b>0,\ n>0)$.

98. $\int_0^1 \frac{x^k dx}{\sqrt[m]{1-x^m}}$ $(m>1,\ k+1>0)$.

99. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx$ $(p>0,\ q>0)$.

100. $\int_0^{\infty} e^{-x^n} x^k dx$ $(n>0,\ k+1>0)$.

101. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$. 102. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$. 103. $\int_0^{\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2axdx$.

104. $\int_0^{\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2axdx$. 105. $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[n]{x}} dx,\ n>1$.

106. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt[n]{x}} dx,\ n>1$. 107. $\int_0^1 \log\Gamma(x)dx$.

108. $\int_a^{a+1} \log\Gamma(x)dx,\ a>0$. 109. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\text{ch}x}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\text{ch}^3 x}}$.

110. $\int_0^{\infty} e^{-x^n} x^{m-1} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-x^n} \cdot x^{n-m-1} dx$ $(n>0,\ 0<m<n)$.

111. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x dx \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x},\ 0<p<1$.

112. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \cdot \int_0^1 \frac{x^{n-2} dx}{\sqrt{1-x^n}},\ n>2$.

113. $\int_0^1 \sqrt{1-x^n} dx \cdot \int_0^1 x^{n-2} \sqrt{1-x^n} dx,\ n>2$.

114. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\mu x dx}{\operatorname{ch} x}$. **115**. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos\mu x dx}{(\operatorname{ch} x)^{2n+1}}$.

116. Доказать, что $\int\limits_0^\pi (\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x \cos\varphi)^k d\varphi = \int\limits_0^\pi \frac{d\varphi}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x \cos\varphi)^{k+1}}$.

117. Доказать, что $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\varphi) d\varphi = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots$

118. Полагая $J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos\varphi) d\varphi$, найти $\int\limits_0^\infty J_0(ax) e^{-bx} dx$ $(a \geqq 0,\ b > 0)$

119. Доказать, что интеграл $J_0(x)$ прим. 118 удовлетворяет дифф. уравнению $y' + \frac{1}{x} y' + y = 0$.

120. Зная, что $J_0(x)$ прим. 118 удовлетворяет дифф. уравнению примера 119, найти $\int\limits_0^1 x J_0(ax) J_0(bx) dx$ при $b^2 \gtrless a^2$.

121. Из предыд. примера найти $\int\limits_0^1 x J_0^2(ax) dx$.

122. $\int\limits_0^1 x J_0(ax) dx$ (см. 118 и 119).

123. Найти $\int\limits_0^\infty \frac{x J_0(x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$, $a > 0$ (см. 118 и 119).

124. Найти $\int\limits_0^\infty \frac{J_1(x) dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ $(a > 0)$, полагая $J_1(x) = -J_0'(x)$ (относит. $J_0(x)$ см. 118 и 119).

125. Доказать, что дифф. уравн. $y''+\coth x\cdot y'-k(k+1)y=0$ удовлетворяется следующими интегралами:

$$\int_0^\pi(\operatorname{ch}x+\operatorname{ch}x\cos\varphi)^k d\varphi,\qquad \int_0^\pi\frac{d\varphi}{(\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x\cos\varphi)^{k+1}}.$$

126. Доказать, что дифф. уравн. $(1-x^2)y''-2xy'+$ $+\left(n^2-\frac{1}{4}\right)y=0$ (n целое полож.) удовлетворяется следующим интегралом:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos n\varphi d\varphi}{\sqrt{x-\cos\varphi}},\quad x>1.$$

127. Доказать, что дифф. уравн. $(1-x^2)y''-2xy'-$ $-\left(\mu^2+\frac{1}{4}\right)y=0$ удовлетворяется интегралами:

$$\int_0^\infty\frac{\cos\mu\varphi d\varphi}{\sqrt{\operatorname{ch}\varphi-x}},\qquad \int_0^\infty\frac{\cos\mu\varphi d\varphi}{\sqrt{\operatorname{ch}\varphi+x}}.$$

128—132. Найти с помощью преобразования в полярные координаты следующие двукратные интегралы:

128. $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2+2xy\cos\alpha)}dxdy.$ **129.** $\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^4+2x^2y^2\cos 2\alpha+y^4)}dxdy.$

130. $\int_0^a\int_0^b\frac{dxdy}{(c^2+x^2+y^2)^{3/2}}.$

131. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dxdy}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}(x^2+y^2+a_1^2)^{3/2}}$ $(a>0,\ a_1>0)$.

132. $\iint\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dxdy$ при $x\geqq 0,\ y\geqq 0, x^2+y^2\leqq 1$.

133. Доказать, что при $a^2+b^2=1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2\cos^2 v+b^2\cos^2 u}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 v)(1-b^2\sin^2 u)}}dudv=\frac{\pi}{2}.$$

ОТДЕЛ VII.

Ряды.

1—40. Разобрать вопрос о сходимости для бесконечных рядов, общие члены которых u_n имеют следующие выражения:

1. $(-1)^n \sin\frac{\pi x}{\sqrt{n}}$. **2.** $(-1)^n \sin\frac{\pi x}{\sqrt{n^3}}$. **3.** $(-1)^n \frac{x^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

4. $n^k \cdot \mathrm{tg}^p\left(\frac{\pi x}{n^1}\right)$. **5.** $n^k \cdot \log^p\left(1+\frac{x}{n^1}\right)$. **6.** $n^k \cdot \left[\left(1+\frac{a}{n^1}\right)^m - 1\right]^p$.

7. $\left[\left(\frac{n^l+a}{n^l+b}\right)^m - 1\right]^p$. **8.** $n^k \cdot \left(\frac{n^l+a}{n^m+b}\right)^p$. **9.** $n^k \cdot \left(a^{\frac{1}{n^1}} - 1\right)^p$.

10. $\sqrt[p]{n^p+1} - n$. **11.** $\left[\sqrt[3]{n^3+1} - \sqrt[4]{n^4+1}\right]\sqrt{n}$.

12. $\sqrt{n^2+an+b} - \sqrt{n^2+a_1n+b_1}$.

13. $\sqrt{n^2+an+b} - \sqrt[3]{n^3+a_1n+b_1}$.

14. $e^{\frac{1}{n}} - a - \frac{b}{n}$. **15.** $\log\frac{n+1}{n-1} - \frac{a}{n}$.

16. $a\sin\frac{\pi}{n} - b\log\frac{n+1}{n}$. **17.** $n\left[\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right]$.

18. $\left(\mathrm{tg}\frac{\pi x}{n^k} - \sin\frac{\pi x}{n^k}\right)^p$. **19.** $\log\cos\left(\frac{\pi}{n^p}\right)$.

20. $a^{\frac{1}{n}} - a^{\sin\frac{1}{n}}$. **21.** $\sin\frac{\pi}{n} - \sin\frac{\pi}{n+1}$.

22. $\left(\mathrm{ch}\frac{1}{n} - 1\right)^p$. **23.** $\left(\mathrm{sh}\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)^p$.

24. $\left[\mathrm{arctg}\frac{\pi}{n} - \mathrm{arctg}\frac{\pi}{n+1}\right]\sqrt{n}$.

25. $\left[\arcsin\frac{\pi}{n} - \mathrm{arc\,tg}\frac{\pi}{n}\right]\cdot n$.

26. $\log\left(\frac{ne^{\frac{1}{n}}}{1+\sqrt{n^2+1}}\right)$ 27. $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots2n+1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n+2}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+3}$.

28. $\frac{1\cdot3\cdot5\cdots2n-1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{1}{n^p}$. 29. $\frac{1\cdot2\cdot3\cdots n}{(1+a)\,(2+a)\cdots(a+n)}\cdot n^p$.

30. $\left[\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{b(b+1)\cdots(b+n-1)}\right]^p$, $b>a$.

31. $\frac{(a+1)\,(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)\,(2b+1)\cdots(nb+1)}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^n$ $(a>0, b>0)$.

32. $\frac{(1\cdot2\cdot3\cdots n)^2}{1\cdot2\cdot3\cdots2n}\cdot2^{2n}\cdot\frac{1}{n^p}$. 33. $\left[\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}\right]^p$.

34. $\left[\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\right]^p$, $0<a<1$.

35. $\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{1\cdot2\cdots n}\cdot\frac{1}{n^p}$, $a>0$.

36. $\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

37. $\left[\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}\right]^p\cdot\frac{1}{n^q}$.

38. $\frac{\left(a^2+\frac{1}{4}\right)\,\left(a^2+\frac{9}{4}\right)\cdots\left(a^2+\frac{(2n-1)^2}{4}\right)}{(1\cdot2\cdot3\cdots n)^2}$.

39. $\frac{(2a+1)\,(2a+3)\,(2a+5)\cdots(2a+4n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n\cdot(2a+2)\,(2a+4)\cdots(2a+2n)\cdot2^{2n}}$ $(a\geq0)$.

40. $\frac{(2n-2-a)\,(2n-4-a)\cdots(2-a)\;a\,(a+1)\,(a+3)\cdots(a+2n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots2n}$

(случаи a пол. четного и отриц. нечетного—исключаются).

41—55. Нижеследующие функции разложить в ряды по целым положит. степеням x с указанием закона составления коэффициентов и границ сходимости ряда:

41. $\frac{5-x}{12-x-x^2}$. 42. $\frac{2-x+x^2}{(1-x)^3}$. 43. $\frac{x}{\sin x}$. 44. $x\cot x$.

45. $\dfrac{x^2}{\operatorname{ch} x - 1}$. 46. $\dfrac{x}{\log(1+x)}$. 47. $\dfrac{x}{e^x - 1}$.

48. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. 49. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \log \dfrac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}$.

50. $\dfrac{1}{3} \log \dfrac{1 + 2x + x^2}{1 - x + x^2}$. 51. $\dfrac{1}{3} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x}{1-x^2} + \dfrac{2}{3} \operatorname{arc\,tg} x$.

52. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}} \log \dfrac{1 + x\sqrt{3} + x^2}{1 - x\sqrt{3} + x^2}$. 53. $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x\sqrt{5}}{1-x^2}$.

54. $\operatorname{arc\,tg}(x+1)$. 55. $\log(1 - x + x^2)$.

56—73. Определить суммы следующих рядов с указанием пределов сходимости ряда:

56. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{1\cdot 4} + \dfrac{x^2}{1\cdot 2\cdot 5} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!\cdot(n+3)} + \ldots$

57. $x - \dfrac{x^3}{1\cdot 3} + \dfrac{x^5}{3\cdot 5} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots$

58. $\dfrac{x^3}{1\cdot 3} - \dfrac{x^4}{2\cdot 4} + \dfrac{x^5}{3\cdot 5} - \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{(n-2)\,n} + \ldots$

59. $\dfrac{1}{3!} + \dfrac{2x^2}{5!} + \dfrac{3x^4}{7!} + \ldots + \dfrac{nx^{2n-2}}{(2n+1)!} + \ldots$

60. $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{3}{4}x^4 + \cdots + \dfrac{n}{n+1}x^{n+1} + \ldots$

61. $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{3}{5}x^5 + \cdots + \dfrac{n}{n+2}x^{n+2} + \ldots$

62. $x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \left(\dfrac{x^{3n+1}}{3n+1} - \dfrac{x^{3n+2}}{3n+2}\right) + \ldots$

63. $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^5}{3\cdot 5} + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\dfrac{x^7}{5\cdot 7} + \ldots$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot (2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot (2n-2)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots$$

64. $\dfrac{1.2}{3!}x^3 - \dfrac{3\cdot 4}{5!}x^5 - \dfrac{5\cdot 6}{7!}x^7 - \cdots + (-1)^{n+1}\dfrac{(2n-1)2n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots$

65. $x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots+(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right]+\cdots$

66. $x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\cdots+(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right]+\cdots$

67. $\frac{x^4}{1\cdot 4}+\frac{x^6}{3\cdot 6}+\frac{x^8}{5\cdot 8}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n-3)\,2n}+\ldots$

68. $x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\cdots+\left(\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-\frac{x^{4n+2}}{4n+2}+\frac{x^{4n+4}}{4n+4}\right)+\cdots$

69. $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-7)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-6)}\cdot\frac{x^n}{n}+\cdots$

70. $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$

при условии: $\alpha\, a_{n+2}+\beta\, a_{n+1}+\gamma\, a_n=0$ для $n\geqq 0$.

71. $1+x+2x^2+3x^3+5x^4+8x^5+\cdots+a_nx^n+\cdots$

при $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n\geqq 0)$.

72. $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$ при условии:
$(n+2)\,\alpha\, a_{n+2}+(n+1)\,\beta\, a_{n+1}+n\,\gamma\, a_n=0$ для значений $n\geqq 1$.

73. $1+2x-x^2+\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{5}x^5+\cdots+a_nx^n+\cdots$ при $(n+2)a_{n+2}+$
$+(n+1)\,a_{n+1}+na_n=0$ для значений $n\geqq 0$.

74—90. Найти суммы следующих численных рядов:

74. $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+2}\right]+\cdots$

75. $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+3}\right]+\cdots$

76. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right]+\cdots$

77. $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{4n+1}+\cdots$

78. $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^n\left[\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}\right]+\cdots$

79. $1-\frac{1}{7}+\frac{1}{13}-\frac{1}{19}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1}{6n+1}+\cdots$

80. $1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\ldots+(-1)^n\left[\frac{1}{6n+1}+\frac{1}{6n+5}\right]+\ldots$

81. $\frac{3}{2.4}-\frac{5}{4.6}+\frac{7}{6.8}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{2n(2n+2)}+\ldots$

82. $\frac{1}{1.3}-\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}-\ldots+(-1)^n.\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}+\ldots$

83. $\frac{1}{1.2}-\frac{1}{4.5}+\frac{1}{7.8}-\ldots+(-1)^n.\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}+\ldots$

84. $\frac{1}{1.3}-\frac{1}{5.7}+\frac{1}{9.11}-\ldots+(-1)^n.\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}+\ldots$

85. $\frac{1}{2.3}-\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}-\ldots+(-1)^{n-1}.\frac{1}{2n(2n+1)}+\ldots$

86. $\frac{1}{1.5}+\frac{1}{9.13}+\frac{1}{17.21}+\ldots+\frac{1}{(8n+1)(8n+5)}+\ldots$

87. $\frac{1}{1.3}-\frac{3}{5.7}+\frac{5}{9.11}-\ldots+(-1)^n.\frac{2n+1}{(4n+1)(4n+3)}+\ldots$

88. $\frac{1}{3.5}-\frac{1}{7.9}+\frac{1}{11.13}-\frac{1}{15.17}+\ldots$

$$+(-1)^{n-1}.\frac{1}{(4n-1)(4n+1)}+\ldots$$

89. $\frac{1}{1.7}+\frac{1}{13.19}+\frac{1}{25.31}+\ldots+\frac{1}{(12n+1)(12n+7)}+\ldots$

90. $\frac{1}{5.7}-\frac{1}{11.13}+\frac{1}{17.19}-\ldots+(-1)^{n-1}.\frac{1}{(6n-1)(6n+1)}+\ldots$

91. Доказать, что сумма ряда

$$\frac{C_0}{1.2.3\ldots k}+\frac{C_1}{(a+1)(a+2)\ldots(a+k)}+$$

$$+\frac{C_2}{(2a+1)(2a+2)\ldots(2a+k)}+\ldots+\frac{C_n}{(na+1)(na+2)\ldots(na+k)}+\ldots$$

выражается интегралом

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(k-1)}\int_0^1(1-t)^{k-1}f(t^a)\,dt,$$

если

$$C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n+\ldots=f(x) \text{ при } |x|<1.$$

92—118. На основании результата 91 найти суммы след. рядов:

92. $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

93. $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)}$.

94. $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)}$.

95. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}$.

96. $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

97. $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)}$.

98. $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(4n+2)}$.

99. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

100. $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

101. $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$.

102. $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$.

103. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)(n+2)}$.

104. $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

105. $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$.

106. $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)}$.

107. $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$.

108. $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4)}$.

109. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.

110. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}$.

111. $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{(4n+3)\,(4n+4)\,(4n+5)}$.

112*. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)\,(2n+2)}$.

113*. $\sum_{0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)\,(2n+2)}$.

114*. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)}$.

115*. $\sum_{0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)}$.

116. $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n\,(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)}$.

117. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(n+3)\,(n+4)\,(n+5)}\cdot\frac{1}{2^n}$.

118. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(2n+2)\,(2n+3)\,(2n+4)}\cdot\frac{1}{3^n}$.

(В задачах, отмеченных *, коэффициент $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ при $n=0$ условно считается $=1$).

119. Доказать, что сумма ряда

$$C_0+\frac{1}{2}C_1+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}C_2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}C_3+\ldots$$

представляется опр. интегралом $\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin^2\varphi)\,d\varphi$, если

$$C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\ldots=f(x)\text{ при }0<x<1.$$

120. Доказать, что сумма ряда

$$C_1+\frac{2}{3}C_3+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}C_5+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}C_7+\ldots$$

равна опред. интегралу $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin\varphi)\,d\varphi$, если

$$C_1x+C_3x^3+C_5x^5+\ldots=f(x) \text{ при } 0<x<1.$$

121—134. На основании результатов 119—120 найти суммы следующих рядов:

121. $\sum\limits_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}$.

122*. $\sum\limits_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$.

123*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$.

124*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{2^n}$.

125*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$.

126*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}$.

127*. $\sum\limits_0^\infty \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$.

128*. $\sum\limits_0^\infty (-1)^n\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{3^n}$.

129. $\sum\limits_1^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{2^n}$.

130 *. $\sum_{0}^{\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^n}$.

131*. $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{a^n}\ (a>1)$.

132. * $\sum_{0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{a^n}(a>1)$.

133. * $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{a^n}\ (a>1)$.

134. * $\sum_{0}^{\infty}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}\cdot\frac{1}{a^n}\ (a>1)$.

(В задачах, отмеченных *, коэффициенты $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}$ и $\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$ при $n=0$ условно считаются $=1$).

135. Доказать, что сумма ряда $\frac{C_0}{1^2}+\frac{C_1}{2^2}+\frac{C_2}{3^2}+\cdots+\frac{C_{n-1}}{n^2}+\cdots$ равна $-\int_0^1 f(x)\log x\,dx$, если $C^0+C_1x+\cdots+C_nx^n+\cdots=f(x)$ при $|x|<1$.

136—139. На основании результата 135 найти суммы следующих рядов:

136. * $\sum_{0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(2n+1)^2}$.

137. * $\sum_{0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}$.

138. * $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}$.

139. * $\sum_{0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \cdot \frac{1}{(2n+3)^2}$.

(Относ. * см. выше, при 134).

140—168. Разложить в тригонометрические ряды (ряды Фурье) следующие функции:

140. $f(x) = -1$ при $-c < x < 0$, $f(x) = +1$ при $0 < x < c$.

141. $f(x) = 0$ при $-c < x < 0$, $f(x) = +1$ при $0 < x < c$.

142. $f(x) = x$ при $0 < x < c$. **143.** $f(x) = x$ при $-c < x < +c$.

144. $f(x) = |x|$ при $-c < x < +c$.

145. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = x$ при $0 < x < \pi$.

146. $f(x) = x$ при $0 < x < \pi$, $f(x) = \pi$ при $\pi < x < 2\pi$.

147. $f(x) = x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \pi - x$ при $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

148. $f(x) = bx$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = ax$ при $0 < x < \pi$.

149. $f(x) = x^2$ при $-\pi < x < +\pi$. **150.** $f(x) = x^2$ при $0 < x < 2\pi$.

151. $f(x) = x^2$ при $0 < x < \pi$.

152. $f(x) = -x^2$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = x^2$ при $0 < x < \pi$.

153. $f(x) = 0$ при $-\pi < x < 0$, $f(x) = x^2$ при $0 < x < \pi$.

154. $f(x) = c^2 - x^2$ при $-c < x < c$.

155. $f(x) = x(c^2 - x^2)$ при $-c < x < c$.

156. $f(x) = (c^2 - x^2)^2$ при $-c < x < +c$.

157. $f(x) = \sin x$ при $0 < x < \pi$.

158. $f(x) = \sin x$ при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

159. $f(x) = \cos x$ при $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

160. $f(x) = \cos x$ при $0 < x < \pi$. **161.** $f(x) = x \sin x$ при $-\pi < x < \pi$.

162. $f(x) = x \cos x$ при $-\pi < x < \pi$.

163. $f(x) = \log \sin \frac{x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$.

164. $f(x) = \sin \mu x$ при $-\pi < x < \pi$ (μ не целое).

165. $f(x) = \cos \mu x$ при $-\pi < x < \pi$ (μ не целое).

166. $f(x) = \operatorname{sh} x$ при $-\pi < x < \pi$. **167.** $f(x) = \operatorname{ch} x$ при $-\pi < x < \pi$.

168. $f(x) = e^x$ про $-\pi < x < \pi$.

169—187. Задачи по исчислению конечных разностей.

169. Полагая $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + (n-1)^k$, вычислить S_k при $k = 3, 4, \cdots 9$.

170. Полагая $T_k = 1^k - 2^k + 3^k - 4^k + \cdots + (2n-1)^k$, вычислить T_k при $k = 2, 3, 9$.

Вычислить следующие суммы:

171. $1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 - 4 \cdot 6 + \cdots + (2n-3)(2n-1)$.

172. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + \cdots + (2n-2)\, 2n$.

173. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (k+1) + \cdots + (n-k+1)(n-k+2) \cdots n$.

174. $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{4 \cdot 6} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)} + \cdots$

175. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{n(n+3)} + \cdots$

176. $\frac{8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{14}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{3n+5}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \cdots$

177. $\frac{10}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{36}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \cdots + \frac{2n^2 - 3n + 1}{n(n+2)(n+4)(n+6)} + \cdots$ (n нечетное).

178. $\frac{1}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{n(n+4)(n+8)} + \cdots$

179. $\frac{1^2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2^2}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} + \cdots$

180. $\frac{1^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{2^2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} . n^2}{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)} + \cdots$

181. $\frac{3}{1\cdot4\cdot7}+\frac{5}{2\cdot5\cdot8}+\frac{7}{3\cdot6\cdot9}+\cdots+\frac{2n+1}{n\,(n+3)\,(n+6)}+\cdots$

182. $\frac{2}{1\cdot3\cdot5}-\frac{5}{2\cdot4\cdot6}+\frac{8}{3\cdot5\cdot7}-\cdots$

$+(-1)^{n-1}\cdot\frac{3n-1}{n\,(n+2)\,(n+4)}+\cdots$

Вычислить при помощи формулы Эйлера-Маклорена следующие суммы с указанною степенью точности:

183. $1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\cdots$ с точн. до $\frac{1}{10^5}$.

184. $\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{99}$ с точн. до $\frac{1}{10^6}$.

185. $\frac{1}{100}+\frac{1}{103}+\frac{1}{106}+\cdots+\frac{1}{397}$ с точн. до $\frac{1}{10^8}$.

186. $\frac{1}{\sqrt{100}}+\frac{1}{\sqrt{101}}+\frac{1}{\sqrt{102}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9999}}$ с точн. до $\frac{1}{10^9}$.

187. $\frac{1}{500\lg500}+\frac{1}{501\lg501}+\cdots+\frac{1}{999\log999}$ с точн. до $\frac{1}{10^5}$.

(lg — знак натурального логарифма).

ОТВЕТЫ.

ОТДЕЛ I.

Высшая алгебра.

1. Рассмотреть $(1+i)^{4k}$.

2. Рассмотреть $(1+i)^{4k+2}$.

3. $P_{n-1}=\dfrac{1-a\cos b-a^n\cos nb+a^{n+1}\cos(n-1)b}{1-2a\cos b+a^2}$.

$Q_{n-1}=\dfrac{a\sin b-a^n\sin nb+a^{n+1}\sin(n-1)b}{1-2a\cos b+a^2}$.

Составить $P_{n-1}+i\,Q_{n-1}$.

4. Положить $x=1$ в разложении выражения $\dfrac{x^n-1}{x-1}$ на множители 2-й степени (случай n нечетного и случай n четного).

5. $\dfrac{x^6-1}{x^2-1}=(x^2-x+1)\,(x^2+x+1)$.

6. $\dfrac{x^6+1}{x^2+1}=(x^2-x\sqrt{3}+1)\,(x^2+x\sqrt{3}+1)$.

7. $\dfrac{x^9-1}{x^3-1}=\left(x^2-2x\cos\dfrac{2\pi}{9}+1\right)\left(x^2-2x\cos\dfrac{4\pi}{9}+1\right)\left(x^2-\right.$
$\left.-2x\cos\dfrac{8\pi}{9}+1\right)$.

8. $\frac{x^9+1}{x^3+1}=\left(x^2-2x\sin\frac{\pi}{9}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{5\pi}{9}+1\right)\left(x^2-\right.$
$\left.-2x\cos\frac{7\pi}{9}+1\right)$.

9. $\pm(2+3i)$.

10. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}, -1$.

11. $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i), \pm\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$.

12. Искомая функция $=1$. (Приложить формулу Лагранжа для интерполирования целой функции при условиях $f(-2)=f(-1)=f(1)=f(2)=1$).

13. $-\frac{1}{40}(x^4-5x^2-36)$.

14. $5-x$.

15. $\frac{3}{16}(x-1)^4+\frac{1}{2}(x-1)^3+2$. Указание: производная функция имеет форму $A(x-1)^2(x+1)$.

16. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x+1}$.

17. $\frac{3}{(x+1)^2}+\frac{1}{x^2}$.

18. $\frac{\frac{2}{3}}{x-1}+\frac{\frac{3}{4}}{x-2}-\frac{\frac{5}{12}}{x+2}$.

19. $\frac{\frac{5}{2}}{x-1}-\frac{6}{x-2}+\frac{\frac{9}{2}}{x-3}$.

20. $\frac{-\frac{1}{6}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{3}{4}}{x-2}-\frac{\frac{1}{12}}{x+2}$.

21. $\frac{\frac{3}{8}}{x-1}-\frac{\frac{1}{5}}{x-2}+\frac{\frac{7}{12}}{x-3}+\frac{\frac{29}{120}}{x+3}$.

22. $\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+2x+2}$.

23. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2+4x+5}$.

24. $\frac{-\frac{1}{2}}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2-4x+5}$.

25. $\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+1}$.

26. $\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x^2+2x+3}$.

27. $\frac{x}{x^2+1}+\frac{1-x}{x^2-x+1}$.

28. $\frac{-5}{(x+1)^2}-\frac{3}{x+1}+\frac{3x+5}{x^2+x+1}$.

29. $\frac{1}{(x-1)^3}+\frac{\frac{5}{2}}{(x-1)^2}-\frac{\frac{3}{2}}{x-1}+\frac{\frac{3}{2}x-1}{x^2+1}$.

30. $\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{3x+1}{(x^2-x+1)^2}-\frac{x+2}{x^2-x+1}$.

31. $\frac{\frac{1}{2}}{(x-1)^3}-\frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}-\frac{\frac{1}{2}}{(x^2+1)^2}+\frac{\frac{1}{4}}{x^2+1}$.

32. $\frac{3}{x-1}-\frac{3x+2}{(x^2-x+1)^3}+\frac{7x-1}{(x^2-x+1)^2}+\frac{-2x+5}{x^2-x+1}$.

33. $\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}$.

34. $\frac{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}{x^2-x+2}+\frac{\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}{x^2+x+2}$

35. $\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{3}+1}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{3}+1}$.

36. $\frac{\frac{1}{6}x}{x-3x+3}+\frac{-\frac{1}{6}x}{x^2+3x+3}$.

37. $\frac{\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}}{x^2-2x-1}-\frac{\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+2x-1}$.

38. $\frac{\frac{1}{3}}{x^2+1}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1}$.

39. $(x-2)^3\ (x^2+x-1)=0$.

40. $(x+1)\ (x^2-x+1)^3=0$.

41. $(x-1)^3\ (x^2+1)^2=0$.

42. 1, 2, −2.

43. 1, 2, 3, −3.

44. 4, −3.

45. 2, −3.

46. 2, 5, −3.

47. 3, −2, −4.

48. 4, $-\frac{1}{2}$, −3.

49. $\frac{1}{4}, -\frac{2}{5}$.

50. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, 3$.

51. $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3, -2$.

52. $\frac{2}{3}, -1, -\frac{3}{2}$.

53. $\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}$.

54. $\frac{3}{2}, -\frac{1}{5}$.

55. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$.

56. $-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$.

57. $3, -2, -4$.

58. $f_2 = 2x - 5$, $f_3 < 0$; корень $(-2, -1)$.

59. Ряд из 2 функций; корень $(1, 2)$.

60. $f_2 = 35x - 12$, $f_3 > 0$; корни: $(0, 1)$ и $(1, 2)$.

61. $f_2 = -x + 4$, $f_3 < 0$; 2 корня: $(-2, -1)$ и $(1, 2)$.

62. $f_2 = -5x - 8$, $f_3, > 0$; нет веществ. корней.

63. $f_2 = 566x + 9$, $f_3 > 0$. Три корня: $(-3, -2)$, $(0,1)$, $(7, 8)$.

64. $f_2 = 566x - 557$, $f_3, > 0$. Три корня: $(-2, -1)$, $(1, 2)$, $(8, 9)$.

65. $f_3 = -13x + 1$, $f_4 < 0$. 2 корня: $(0, 1)$ и $(-6, -5)$.

66. $f_3 = -13x + 14$, $f_4 < 0$. 2 корня: $(1, 2)$ и $(-5, -4)$.

67. Двукратный корень $x = 1$ и корень $(1, 2)$.

68. Двукратный корень $x = 2$ и корень $(2, 3)$.

69. Двукратный корень $x = -2$ и корень $(-2, -1)$.

70. Трехкратный корень $x = 2$ и корни: $(0, 1)$, $(-2, -1)$.

71. $f_2 = x^2 - 3x + 3$ не имеет веществ. корней; два корня: $(1, 2)$ и $(-3, -2)$.

72. $f_4 = -65x^2 - 101x - 55$ не имеет веществ. корней; два корня: $(-3, -2)$, $(-1, 0)$.

73. $f_4 = -65x^2 + 29x - 19$ не имеет веществ. корней; два корня: $(0, 1)$, $(-2, -1)$.

74. $f_4 = -65x^2 - 231x - 221$ не имеет веществ. корней; два корня: $(-2, -1)$, $(-4, -3)$.

75. $\frac{1}{2}\left\{\sqrt[4]{27} - \sqrt{3} + \sqrt[4]{3} - 1\right\}$.

76. $-1,7\sqrt[4]{6^3}-2,4\sqrt{6}-3,8\sqrt[4]{6}-6,6$.

77. $\frac{1}{22}\left\{13-3\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{25}\right\}$.

78. $\frac{1}{34}\left\{(14+9\sqrt{2})\sqrt[3]{9}-(4+5\sqrt{2})\sqrt[3]{3}+(6-\sqrt{2})\right\}$.

79. $\frac{p}{q}$. **80**. $2\frac{p^2}{q^2}$. **81**. -3. **82**. $\frac{2p^2}{q}$.

83. 2. **84**. $-\frac{8}{7}$. **85**. $\frac{20}{9}$. **86**. $\frac{13}{11}$.

87. Вещ. корень $=2+\sqrt[3]{-2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{-2-\sqrt{3}}$.

88. Корни: $1, -(1-2\sqrt{2}\sin 15^\circ)=-0,2679$,
$-(1+2\sqrt{2}\cos 15^\circ)=-3,7321$.

89. Корни: 2,605; $-3,382$; $-0,723$.

90. Корни: $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$. **91**. Корни: $1\pm\sqrt{2}$,
$-3\pm\sqrt{10}$.

92. Корни: $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, $\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$. **93**. Корни: $\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$, $\frac{1\pm i\sqrt{11}}{2}$.

94. Разлагается на 2 квадр. уравнения:

$$x^2+x\left\{1\mp\sqrt{2\sqrt[3]{3}+1}\right\}+\left\{\sqrt[3]{3}\pm\frac{2-\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2\sqrt[3]{3}+1}}\right\}=0.$$

95. $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$. **96**. $(x^2-3x+3)(x^2+3x+3)$.

97. $(x^2-2x-1)(x^2+2x-1)$.

98. Уравнение с 16-ми степенями корней:

$x^3+8.00455_{-10}x^2+6.03159_{-20}x+7.66096_{-40}=0$.

Корни: 0,7504; 0,1785; 0,0711.

99. Уравнение с 16-ми степенями корней:

$x^3+8.28432_{-10}x^2+9.45215_{-20}x+3.78576_{-30}$.

Корни: 0,7812; 0,2805; 0,1049.

100. Уравнение с 64-ми степенями корней:

$x^4 + 4.85412_{-10}x^3 + 6.55254_{-40}x^2 + 1.12864_{-70}x + 1.93792_{-170}$.

Корни: 0,8310; 0,3612; 0,2796; 0,0282.

101. Корни: $a, b, -(a+b)$.

102. $x=a,\ x=b,\ x^2+x(a+b)+a^2+ab+b^2=0$.

103. $k=7$. **104.** $t=1,\ t=2\pm i\sqrt{26}$.

ОТДЕЛ II.

Интегрирование функций.

Постоянные произвольные во всех ответах опущены.

1. $-x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$.

2. $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

3. $\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$. **4.** $\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{x}$.

5. $-\frac{1}{x}+\log\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

6. $\frac{1}{80}\log\frac{x^{20}(x-2)^3}{(x-1)^{16}(3x+2)^9}$.

7. $\frac{1}{2}\lg(1+x)-\frac{1}{6}\log(1+x^3)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

8. $-\frac{1}{2}\lg(1+x)+\frac{1}{6}\lg(1+x^3)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

9. $\frac{1}{8}\log\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}-\frac{1}{8\sqrt{2}}\log\frac{x^2-2\sqrt{2}x+1}{x^2+2\sqrt{2}x+1}$

10. $\frac{1}{6}\log\frac{x}{x+3}+\frac{1}{2}\log\frac{x+2}{x+1}$. **11.** $\log(x+1)+2\operatorname{arc\,tg}(x+2)$.

12. $\lg(x-1)-\frac{1}{2}\lg(x^2+2x+2)$.

13. $\frac{1}{8}\log\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}$.

14. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

15. $\frac{3}{8}\log\frac{x^2+x+2}{x^2-x+2}-\frac{1}{4\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{7}}{2-x^2}$.

16. $-\frac{4x-3}{2(x-1)^2}+\log\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}}-\operatorname{arc\,tg}x$.

17. $\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x}$. 18. $-\frac{1}{x}-\frac{3}{x+1}$.

19. $\frac{3}{8}\log(x-1)-\frac{1}{5}\log(x-2)+\frac{7}{12}\log(x-3)+\frac{29}{120}\log(x+3)$.

20. $\frac{1}{12}\log\frac{x^2-3x+3}{x^2+3x+3}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{3-x^2}$.

21. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x-2)$.

22. $\frac{-1}{x+1}-\frac{1}{2}\log(x+1)+\frac{1}{4}\log(x^2+2x+3)$.

23. $-\frac{11x^2-18x+13}{3(x-1)(x^2-x+1)}+\log(x-1)-\frac{1}{2}\log(x^2-x+1)-$
$-\frac{25}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

24. $\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{4\sqrt{3}}\log\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.

25. $\frac{1}{8}\log\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{8\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+$
$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$.

26. $\frac{x^2-2}{(3x^2-x+1)}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

27. $\frac{3}{56y^7} - \frac{1}{24y^6} - \frac{1}{40y^5}, y = 2x - 1.$

28. $-\frac{1}{2y^2} + \frac{2}{y^3} - \frac{3}{y^4} + \frac{9}{5y^5}, y = x + 2.$

29. $\frac{1}{3^6}\left\{-\frac{y^2}{2} + 5y - 10\log y - \frac{10}{y} + \frac{5}{2y^2} - \frac{1}{3y^3}\right\}, y = \frac{x+1}{x-2}.$

30. $\frac{1}{13^4}\left\{-\frac{8}{y} - 36\log y + 54y - \frac{27}{2}y^2\right\}, y = \frac{2x+3}{3x-2}.$

31. $-\frac{1}{5y^5} + \frac{7}{4y^4} - \frac{7}{y^3} + \frac{35}{2y^2} - \frac{35}{y} - 21\log y + 7y - \frac{y^2}{2}, y = \frac{x-1}{x}.$

32. $-\frac{1}{3y^3} + \frac{3}{y^2} - \frac{15}{y} - 20\log y + 15y - 3y^2 + \frac{y^3}{3}, y = \frac{x-2}{x-1}.$

33. $\frac{1}{3}\log(1+x^3)$, подстановка $y = x^3$.

34. $\frac{2}{3}\operatorname{arc\,tg} x^3 - \frac{1}{6}\log(1+x^6)$, разложить на 2 интеграла и ввести в первом $x^3 = y$, во втором $x^6 = z$.

35. $\log\frac{x^3+1}{x}, y = x^3.$ 36. $\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{1-x^3} + \log\frac{x^3}{1-x^3}\right], y = 1 - x^3.$

37. $\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{x^2+1} - \frac{1}{x^2}\right] - \log\frac{x^2}{x^2+1}, y = 1 + x^2.$

38. $\frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} x^2 + \lg(1+x^4)\right], y = x^2.$ 39. $\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg} x^6, y = x^6.$

40. $\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x^2 + \frac{1}{8}\log\frac{x^2-1}{x^2+1}, y = x^2.$

41. $-\frac{1}{6}\log(x^2+1) + \frac{1}{12}\log(x^4 - x^2 + 1) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}},$ $y = x^2.$

42. $\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x^4, y = x^4.$

43. $\frac{1}{6}\log\frac{x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}, y = x^2.$

44. $\frac{1}{5}\log\frac{x^5}{1+x^5}$, $y=x^5$. 45. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2+1}{\sqrt{3}}$, $y=x^2$.

46. $\frac{1}{6}\log\frac{x^3-1}{x^3+1}$, $y=x^3$. 47. $\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{8}\log\frac{x^2-2}{x^2}$, $y=x^2$.

48. $\frac{1}{4}\log(x^4-3x^2+9)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x^2-3}{3\sqrt{3}}$, $y=x^2$.

49. $-\frac{2}{2x^2}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x^2$, $y=x^2$. 50. $-\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x^3$, $y=x^3$.

51. $-\frac{1}{4x^4}-\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}x^4$, $y=x^4$. 52. $\frac{1}{4}\log y+\frac{1}{4y}$, $y=1+x^4$.

53. $-\frac{1+2x^6}{12(1+x^6)^2}$, $y=1+x^6$. 54. $\frac{1}{4y}+\frac{1}{4}\lg\frac{y-1}{y}$, $y=1+x^4$.

55. $\frac{2}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{2x^3-1}{\sqrt{3}}$. $y=x^3$.

56. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\log\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.

57. $\frac{-x}{4(x^2-3)^2}-\frac{x}{24(x^2-3)}-\frac{1}{48\sqrt{3}}\log\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}$. Начать с интегрирования по частям.

58. $\frac{-x^3}{4(x^2+2)^2}-\frac{3x}{8(x^2+2)}+\frac{3\sqrt{2}}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}$. Два раза интегрировать по частям.

59. $\frac{x(1+3x^2)}{4(1+x^2)^2}-\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}x$. Разложить на 2 интеграла и брать по частям.

60. $\frac{-x^8}{9(1+x^3)^3}-\frac{4x^5}{27(1+x^3)^2}-\frac{20x^2}{81(1+x^3)}-\frac{40}{243}\log\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+$ $+\frac{40}{81\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Три раза интегрировать по частям.

61. $\frac{-x^3}{4(x^2+1)^2}-\frac{3x}{8(x^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arc\,tg}x$. Два раза по частям.

62. $\frac{-x^7}{12(x^6+1)^2}-\frac{7x}{72(x^6+1)}+\frac{7}{72}\int\frac{dx}{1+x^6}$ (см. 24). Два раза по частям.

63. $\frac{-x}{3(x^3+1)}+\frac{1}{9}\log\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. Взять по частям.

64. $\frac{-x}{4(x^4-1)}+\frac{1}{16}\log\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}x$. По частям.

65. $\frac{x(2x^2+3)}{2(x^2+1)}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x$. По частям.

66. $\frac{x}{4(2x^2-1)}+\frac{3}{8\sqrt{2}}\log\frac{x\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}+1}$. Заменить: $x^2-1=$
$=(2x^2-1)-x^2$.

67. $\frac{-x}{x^2+x+1}$, подстановка: $y=x+\frac{1}{x}$. Подобная подстановка прилагается к таким интегралам, в которых подынтегральный дифференциал $f(x)dx$ не меняется от замены x на $\frac{1}{x}$.

68. $\frac{1}{2}\log\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, $y=x+\frac{1}{x}$.

69. $\frac{1}{3}\lg\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}$, $y=x+\frac{1}{x}$.

70. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{5}}{1-x^2}$, $y=x-\frac{1}{x}$. Такая подстановка применяется в случае, если $f(x)dx$ не меняется от замены x на $-\frac{1}{x}$.

71. $\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}+\frac{3}{16}\log\frac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$, $y=x-\frac{1}{x}$.

72. $\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{x^2-x\sqrt{3}+1}{x^2+x\sqrt{3}+1}$, $y=x+\frac{1}{x}$.

73. $\frac{1}{3}\log\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{6}\log\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, $y=x+\frac{1}{x}$.

74. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}+\frac{2}{3}\operatorname{arctg}x$, $y=x-\frac{1}{x}$.

75. $\frac{1}{5}\log(x-1)+\log(x+1)-\frac{3}{5}\log(x^2+3x+1)$,

$$y=x+\frac{1}{x}.$$

76. $\frac{1}{3}\log\frac{x^2-2x+1}{x^2+x+1},\ y=x+\frac{1}{x}.$

77. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1},\ y=x+\frac{1}{x}.$

78. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2},\ y=x-\frac{1}{x}.$

79. $\frac{1}{2}\log(x+1)-\frac{1}{10}\log(x^5+1)+$

$$+\frac{1}{2\sqrt{5}}\log\frac{x^2-\frac{x}{2}(\sqrt{5}+1)+1}{x^2+\frac{x}{2}(\sqrt{5}-1)+1},\ y=x+\frac{1}{x}.$$

80. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2+1}{x\sqrt{3}},\ y=x+\frac{1}{x}.$

81. $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{7}}{1-x^2},\ y=x-\frac{1}{x}.$

82. $\log\frac{x^2-x-1}{x},\ y=x-\frac{1}{x}.$

83. $\frac{-2}{(x+1)\sqrt{x}},\ x=y^2.$ **84.** $\frac{3}{8}(x^4+1)^{\frac{2}{3}},\ y^3=x^4+1.$

85. $\frac{5}{36}(2x^2-5)(x^2+2)^{\frac{4}{5}},\ x^2+2=y^5.$

86. $4\left[\frac{1}{3}y^3-y+\operatorname{arc\,tg}y\right],\ x=y^4.$

87. $\frac{3}{4}\log(\sqrt[3]{x}-1)+\frac{9}{8}\log(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+2)+\frac{3}{4\sqrt{7}}$

$$\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{7}};\ x=y^3.$$

88. $-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}, \quad \frac{x+1}{x} = y^2.$

89. $-\frac{3}{2}\log\left\{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{x-1}\right\} -$

$$-\sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x+1}}, \quad \frac{x-1}{x+1} = y^3.$$

90. $-\frac{3}{4}\left[\frac{x+1}{x-1}\right]^{2/3}, \quad \frac{x+1}{x-1} = y^3.$

91. $-\sqrt[3]{(1+x)\,(1-x)^2} + \log\left[\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}\right] +$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{1-x}}, \quad \frac{1+x}{1-x} = y^3.$$

92. $-\sqrt[4]{(2-x)\,(1-x)^3} + \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt[4]{2-x} - \sqrt[4]{1-x}}{\sqrt[4]{2+x} + \sqrt[4]{1-x}} -$

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt[4]{\frac{2-x}{1-x}}, \quad \frac{2-x}{1-x} = y^4.$$

93. $+-4\sqrt[4]{\frac{x}{x-1}}, \quad y^4 = \frac{x}{x-1}.$

94. $\frac{3}{16}\cdot\frac{3x+5}{x+1}\cdot\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}, \quad \frac{x-1}{x+1} = y^3.$

95. $\frac{2}{3}\cdot\frac{2x+1}{x}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x}}, \quad y^2 = \frac{x-1}{x}.$

96. $-(5+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 6\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad y^2 = \frac{1-x}{1+x}.$

97. $x+1+4\sqrt{x+1} + 2\log\,(x-\sqrt{x+1}) +$

$$+\frac{6}{\sqrt{5}}\log\frac{2\sqrt{x+1}-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{x+1}-1+\sqrt{5}}, \quad y^2 = x+1.$$

98. $2\sqrt{2x+1}+2\sqrt{x+2}+\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{3}}+$

$$+\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3}}.$$

Умножить числитель и знаменатель подынтегр. функции на $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+2}$, т. е. на выражение, сопряженное с знаменателем.

99. $\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}-\frac{2}{3}x^{3/2}$, преобразование пред. примера.

100. $a\cdot\arcsin x+\sqrt{1-a^2}\log\left[x\sqrt{1-a^2}+a\sqrt{1-x^2}\right]$. См. 98.

101. $-\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\log(x+\sqrt{x^2+1})$. По частям.

102. $x^2\sqrt{x^2+a^2}$, $x^2+a^2=y^2$.

103. $\arcsin\frac{2x+1}{5}$, $y=x+\frac{1}{2}$. 104. $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{\sqrt{5}}$, $y=x-\frac{1}{3}$.

105. $\log(x+\sqrt{x^2+3})$, $y=x+\sqrt{x^2+3}$.

106. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left(x+\frac{7}{6}+\sqrt{x^2+\frac{7}{3}x-\frac{1}{3}}\right)$, $y=x+\frac{7}{6}$ привод. к виду 105.

107. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a}+\frac{a}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a})$, по частям.

108. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$, по частям.

109. $\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+\frac{5}{2}\log(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$.

По формуле с неопределенными коэффициентами.

110. $(x^2-x+1)\sqrt{x^2+2x+5}$. Как 109.

111. $2x^2\sqrt{1-x-x^2}+\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}$. Как 109.

112. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\right)\sqrt{2x^2-x+3}+\frac{23}{16\sqrt{2}}\log\left(2x-\frac{1}{2}+\right.$

$+\sqrt{2}\quad\sqrt{2x^2-x+3}\Big)$, представить $\int\sqrt{R}\,dx$ в виде $\int\frac{R}{\sqrt{R}}\,dx$.

113. $-\frac{1}{3}(2-x-x^2)^{3/2}+\frac{1}{8}(2x+1)\sqrt{2-x-x^2}+\frac{9}{16}\arcsin\frac{2x+1}{3}$, подстановка $x+\frac{1}{2}=y$ и далее, как 108.

114. $-\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}$, $y=\frac{1}{x}$.

115. $\frac{2}{3}\cdot\frac{2x-1}{(x-1)^2}\sqrt{x^2-3x+2}$, $y=\frac{1}{x-1}$.

116. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x^2+2x+3}}{x+1}$, $x+1=\frac{1}{y}$.

117. $-\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{3(x+2)}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}-3x}{x+2}$,

$x+2=\frac{1}{y}$.

118. $-\frac{2}{15}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\cdot\frac{8x^2+12x+7}{(x+1)^2}$, $x+1=\frac{1}{y}$ или $\frac{x+2}{x+1}=z^2$.

119. $-\frac{1}{2\sqrt{7}}\log\frac{5x+4+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{R}}{x-2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\log\frac{-3x+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{R}}{x+2}$,

$R=x^2+x+1$. Разложить на 2 интеграла: $A\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{R}}$ и

$B\int\frac{dx}{(x+2)\sqrt{R}}$.

120. $2\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x+1}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{3x+1+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{R}}{x-1}$,

$R=x^2+x$. Разложить на 3 интеграла: $A\int\frac{dx}{x\sqrt{R}}+$

$+B\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{R}}+C\int\frac{d}{(x-1)\sqrt{R}}$.

121. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $x^{-2}+1=y^2$. **122.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$, $x^{-2}-1=y^2$.

123. $\frac{1}{4}\log\frac{2-\sqrt{3-x^2}}{2+\sqrt{3-x^2}}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3-x^2}}{2x}$. Разложить на 2 интеграла: $A\int\frac{xdx}{(x^2+1)\sqrt{R}}$ (подстан. $3-x^2=y^2$) и $B\int\frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{R}}$ (подстан. $3x^{-2}-1=z^2$).

124. $\frac{-x\sqrt{1+x^2}}{4(x^2+2)}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+1}+x}$, $x^{-2}+1=y^2$.

125. $-\frac{2x^3+3x+1}{(x^2+1)^{3/2}}$ $x^{-2}+1=y^2$. **126.** $\frac{-2}{\sqrt{x^2-x+1}}$, $y^2=x^2-x+1$.

127. $\frac{6x-2}{5\sqrt{1-x-x^2}}$, $x+\frac{1}{2}=y$ и далее, как в 123.

128. $\frac{x}{\sqrt{x^2+2x-1}}$, $x+1=y$ и далее, как в 123.

129. $\frac{x^3}{3a^2(a^2-x^2)^{3/2}}$, $a^2x^{-2}-1=y^2$.

130. $-\frac{1}{9}\cdot\frac{16x^3+24x^2+30x+14}{(x^2+x+1)^{3/2}}$, $x+\frac{1}{2}=y$ и далее, как 123.

131. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{x\sqrt{2}-\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{2}+\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{2\sqrt{1+x^2}}$, приводятся к 2 интегралам: $A\int\frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}+B\int\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

132. $-\frac{2}{\sqrt{7}}\log\frac{5x+4+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}+$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{3x+3+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+x+1}}{x-1}$, приводится к 2 интегралам: $A\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{R}}+B\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{R}}$.

133. $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4(1+x^2)}-\frac{3}{4\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}$, $x^{-2}-1=y^2$.

134. $\frac{1}{\sqrt{65}}\log\frac{\sqrt{5}(2x+1)-\sqrt{13}\cdot\sqrt{R}}{\sqrt{5}(2x+1)+\sqrt{13}\cdot\sqrt{R}}$, $R=x^2+x+2$; $x+\frac{1}{2}=y$ и 123.

135. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{\sqrt{3}},\ x-\frac{1}{2}=y.$

136. $-\frac{1}{2}\log\frac{5-3x+4\sqrt{x^2-x+2}}{x+1}-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2-x+2}}{2x-1}.$

Разложить $\frac{x^2+2}{x^3+1}$ на простейшие дроби.

137. $\frac{1}{6\sqrt{7}}\log\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{R}+2-x}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{R}-2+x}+\frac{2}{3}\log\frac{\sqrt{R}+x+1}{\sqrt{R}-x-1},$

$R=3x^2+8x+2$. Подстановка $x=\frac{2z-1}{z+1}$.

138. $\frac{5}{2\sqrt{403}}\log\frac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{R}-\sqrt{31}(1-x)}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{R}+\sqrt{31}(1-x)}+\frac{1}{\sqrt{93}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{R}}{\sqrt{31}(1+x)}.$

$R=3x^2-4x+3$. Подстановка $x=\frac{z-1}{z+1}$.

139. $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{5}(x-1)}+\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{7}}\log\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt{R}-\sqrt{5}(1+x)}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{R}+\sqrt{5}(1+x)},$

$R=x^2+x+1$. Подстановка $x=\frac{y-1}{y+1}$.

140. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}y+\frac{1}{3}\lg\frac{y-1}{y+1},\ y=\sqrt[4]{1+x^3}.$

141. $\frac{3}{10}\log(y-1)-\frac{1}{2}\log x+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2y+1}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt[3]{1+x^5};$

142. $\frac{1}{2}\log(R+x)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2R-x}{x\sqrt{3}},\ R=\sqrt[3]{2-x^3};\ 2x^{-3}-1=y^3.$

143. $\frac{1}{4}\log\frac{R+x}{R-x}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{R}{x},\ R=\sqrt[4]{1+x^4};\ x^{-4}+1=y^4.$

144. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left[\frac{1}{2}\log\left(\sqrt[3]{1-x^3}+x\sqrt[3]{2}\right)-\frac{1}{6}\log(1+x^3)-\right.$

$\left.-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{4(1-x^3)}-x}{x\sqrt{3}}\right].$ Подстановка $x^{-3}-1=y^3$ и $y=\sqrt[3]{2}\cdot z.$

145. $\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{R}{x\sqrt[4]{3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{3}}\log\frac{x\sqrt[4]{3}+R}{x\sqrt[4]{3}-R}, R=\sqrt[4]{x^4+2},$

$1+2x^{-4}=y^4.$

146. $\frac{1}{2\sqrt{10}\cdot\sqrt[4]{5}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{R}{x\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\log\frac{R-x\sqrt{2}}{R+x\sqrt{2}}\right], R=\sqrt[4]{5+5x^4}.$

Подстановка $1+x^{-4}=y^4$.

147. $-\frac{x^3}{4}\sqrt{1-x^4}+\frac{1}{4}\arcsin x^2, y=x^2.$

148. $-\frac{1}{4}\cdot\frac{(1+x^5)^{4/5}}{x^4}, x^{-5}+1=y^5.$

149. $\frac{1}{2}\log\frac{x}{y+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2y-1}{\sqrt{3}}, y=\sqrt[3]{x^3-1}.$

150. $-\frac{1}{5}\cdot\frac{(2x^6+1)^{5/6}}{x^5}, x^{-6}+2=y^6.$

151. $\frac{1}{3}x(3-2x^3)^{2/3}+$

$+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left[\log\left(\sqrt[3]{3-2x^3}+x\sqrt[3]{2}\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt[3]{4(3-2x^3)}-x}{x\sqrt{3}}\right].$

$3x^{-3}-2=y^3.$

152. $\frac{1}{4}x^2\cdot R-\frac{1}{16}\log\frac{R-x}{R+x}+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{R}{x}, R=\sqrt[4]{1+x^4}; x^{-4}+1=y^4.$

153. $-\frac{1}{105}(1-x^{2/3})^{3/2}(8+20x^{2/3}+35x^{4/3}), 1-x^{2/3}=y^2.$

154. $\frac{1}{5}(1+x^4)^{5/4}, 1+x^4=y^4.$

155. $\frac{1}{455}(1+x^{3/4})^{4/3}[140x^{9/4}-126x^{3/2}+108x^{3/4}-81], 1+x^{3/4}=y^3.$

156. $\frac{x}{\sqrt[6]{1+x^6}}, x^{-6}+1=y^6.$

157. $(x-{}^1/_2)\left\{\frac{1}{6}R^{5/2}+\frac{5}{32}R^{3/2}+\frac{45}{256}R^{1/2}\right\}+\frac{134}{1024}\log\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{R}\right)$,

$R=1-x+x^2$. Подстановки $x-\frac{1}{2}=y$, $\frac{3}{4}y^{-2}+1=z^2$ приводят к интегралу $A\int\frac{z^6dz}{(z^2-1)^4}$, который берется по частям.

158. $\frac{1}{2}\log\left(x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{x^4+x^2+1}\right)$, $x^2=y$.

159. $-\frac{1}{2}\log\frac{1}{x^2}(2-x^2+2\sqrt{1-x^2+x^4})$, $x^2=y$.

160. $\frac{2}{3}(x+\sqrt{1+x^2})^{3/2}$, $y=x+\sqrt{1+x^2}$.

161. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{2}\,(x^2+x+1)}{(x+1)^2}$, $x+\frac{1}{x}=y$.

См. указание задачи 67.

162. $\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^4-x^2+1}}{x\sqrt{3}}\right)$, $x+\frac{1}{x}=y$.

163. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x^4+1}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{1+x^4}-x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}+x\sqrt{2}}$, $x+\frac{1}{x}=y$.

164. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\,(x^4+x^2+1)}}{x^2-1}$, $x-\frac{1}{x}=y$.

См. указание зад. 70.

165. $-\frac{1}{9}\cdot\frac{x^4+5x^2+1}{(x^2+1)\sqrt{x^4-x^2+1}}$, $x+\frac{1}{x}=y$.

166. $\frac{\sqrt{2}}{3}\arcsin\frac{x^2-3x+1}{(x^2-x+1)\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{x^4-x^2+1}-(2x^2+3x+2)}{(x+1)^2}$,

$y=x+\frac{1}{x}$.

167. $2\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x}}$, $y=x+\frac{1}{x}$.

168. $2\sqrt{\frac{x^2+x-1}{x}}$, $y=x-\frac{1}{x}$.

169. $x^3\sqrt{1+x^4}$. Интеграл $\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1+x^4}}$ взять по частям.

170. $x\sqrt{1+x^4}$. Интеграл $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1+x^4}}$ взять по частям.

171. $e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}\right)$. По формуле с неопределенными коэффициентами.

172. $\frac{-1}{\sqrt[3]{2^x}}\left\{\frac{3(x^2-1)}{\log 2}+\frac{18x}{\log^2 2}+\frac{54}{\log^3 2}\right\}$. Как 171.

173. $\frac{1}{10}e^{-x}(3\sin 3x-\cos 3x)$. Как 171.

174. $\frac{2}{\sqrt{3^x}(4+\log^2 3)}\{(6-\log 3)\cos x+(3\log 3+2)\sin x\}$. Как 171.

175. $e^{-x}\{(-0{,}2x^2+0{,}24x+0{,}176)\cos 2x+$
$+(0{,}4x^2+0{,}32x-0{,}032)\sin 2x\}$. Как 171.

176. $\frac{1}{4}e^{2x}\left\{(-0{,}6x+0{,}48)\cos x+(1{,}2x-0{,}36)\sin x+\right.$ $\left.+\left(\frac{3}{13}x-\frac{12}{169}\right)\cos 3x-\left(\frac{2}{13}x+\frac{5}{169}\right)\sin 3x\right\}$. Выразить $\sin^3 x$ через $a\sin x+b\sin 3x$ и далее, как в предыдущей зад.

177. $\frac{1}{3}\sin 3x\left(x^3-\frac{5}{3}x\right)+\frac{1}{9}\cos 3x\left(3x^2-\frac{5}{3}\right)$, по частям.

178. $\frac{1}{4}\left(-x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)$. Приложить формулы, выражающие произведение синусов и косинусов через разность и сумму косинусов.

179. $x\left\{\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{12}\cos 6x\right\}-\left\{\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{72}\sin 6x\right\}$. Преобразовать, как в 178, и далее по частям.

180. $\frac{1}{\sqrt{6}}\log\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3-\sqrt{6}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3+\sqrt{6}}$, $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

181. $\frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$, $y = \cos x$. **182.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$, $y = \operatorname{tg} x$.

183. $\frac{-1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x$, $y = \sin x$. **184.** $-\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7$, $y = \cot x$.

185. $\frac{-1}{3y^3} - \frac{4}{y} + 6y + \frac{4}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5$, $y = \operatorname{tg} x$.

186. $\frac{y^4}{4} + \frac{3}{2}y^2 + 3\log y - \frac{1}{2y^2}$, $y = \operatorname{tg} x$.

187. $-y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5$, $y = \cot x$.

188. $\frac{-1}{64y^4} - \frac{1}{8y^2} + \frac{3}{8}\log y + \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{64}y^4$ при $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$,

или: $\frac{-\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ (введя в числитель $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и интегрируя $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^5 x}dx$ по частям).

189. $y + y^3 + \frac{3}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7$, $y = \operatorname{tg} x$.

190. $\frac{-1}{8y^2} + \frac{1}{2}\log y + \frac{1}{8}y^2$ при $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$,

или: $\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ (введя $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, как 188).

191. $-y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5$, $y = \cos x$.

192. $-\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x - \frac{5}{16}\sin x\cos x + \frac{5}{16}x$

(по формулам приведения) или:

$-\frac{1}{32}\left\{\frac{1}{6}\sin 6x - \frac{3}{2}\sin 4x + \frac{15}{2}\sin 2x - 10x\right\}$, выражая $\sin^6 x$ через кратные дуги).

193. $y - y^3 + \frac{3}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7$, $y = \sin x$.

194. $\frac{1}{4}\sin x\cos^3 x+\frac{3}{8}\sin x\cos x+\frac{3}{8}x$

или: $\frac{1}{32}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{8}x$ (см. 192).

195. $\frac{-1}{\sin x}+\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{7\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{15}{8}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ (введение в числитель $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ приводит к инт. $\int\frac{dx}{\cos^k x}$ при $k=5, 3, 1$).

196. $\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)-\sin x$ (заменить $\sin^2 x$ на $1-\cos^2 x$).

197. $\frac{1}{3\cos^3 x}+\frac{2}{\cos x}-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\frac{5}{2}\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Прием n^0 195.

198. $\frac{-1}{2y^2}+2\log y+\frac{1}{2}y^2$, $y=\operatorname{tg}x$.

199. $\operatorname{tg}x-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\sin x\cos x$. Выразить $\sin^4 x$ через $\cos x$.

200. $\frac{\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{5}{2}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+2\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x$. Выразить $\sin^6 x$ через $\cos x$.

201. $\frac{1}{9}y^9-\frac{2}{11}y^{11}+\frac{1}{13}y^{13}$, $y=\sin x$.

202. $-\frac{1}{8}y^8+\frac{1}{10}y^{10}$, $y=\cos x$.

203. $\frac{-\cos^5 x}{12}\left(\sin^7 x+\frac{7}{10}\sin^5 x+\frac{7}{16}\sin^3 x+\frac{7}{32}\sin x\right)+$

$+\frac{7}{512}\left(\frac{1}{3}\sin x\cos^3 x+\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{2}x\right)$ (по форм. приведения)

или: $\frac{1}{1024}\left[\frac{\sin 12x}{24}-\frac{\sin 10x}{5}+\frac{\sin 8x}{8}+\sin 6x-\frac{17\sin 4x}{8}-2\sin 2x+7x\right]$ (через кратные дуги).

204. $-\frac{2}{\sqrt{y}}$, $y=\operatorname{tg}x$. **205.** $-\frac{2}{3}y^{3/2}$, $y=\cos x$.

206. $3y^{\frac{1}{3}}$, $y=\operatorname{tg}x$.

207. $-\frac{1}{2}\sqrt{\sin x \cos^3 x}+\frac{1}{8\sqrt{2}}\log\frac{1+\sqrt{2y}+y}{1-\sqrt{2y}+y}+$

$+\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2y}}{1-y}$, $y=\operatorname{tg}x$.

208. $\frac{4}{3}y^{3/4}$, $y=\operatorname{tg}x$. **209.** $\frac{-2}{\sqrt{y}}+\frac{2}{3}y^{3/2}$, $y=\operatorname{tg}x$.

210. $\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{2}y^2-\lg\cos x$, $y=\operatorname{tg}x$.

211. $-\frac{1}{3}y^3+y+x$, $y=\cot x$.

212. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{1+\sqrt{2y}+y}{1-\sqrt{2y}+y}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2y}}{1-y}$, $y=\operatorname{tg}x$.

213. $\operatorname{arc\,tg}y+\frac{\sqrt{3}}{4}\log\frac{y^2+y\sqrt{3}+1}{y^2-y\sqrt{3}+1}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{1-y^2}$, $y=\sqrt{\operatorname{tg}x}$.

214. $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\,y\right)$, $y=\operatorname{tg}x$.

215. $\frac{\sin x\cos x}{24(3+\sin^2 x)}+\frac{7}{48\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{3}}\right)$, $\operatorname{tg}x=y$.

216. $\frac{-2}{\sin^2 x}+\frac{\cos x}{\sin^3 x}$, $\cot x=y$.

217. $\frac{2}{5}x-\frac{1}{5}\log(2\cos x-\sin x)$, $y=\operatorname{tg}x$.

218. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{y+2-\sqrt{3}}{y+2+\sqrt{3}}$, $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

219. $\frac{-1}{6(1-3\cos x)^2}$, $y=1-3\cos x$.

220. $\frac{\sin x}{2+\cos x}-x+\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$. Интегр. по частям.

221. $\frac{\cos x}{8(3+\sin x)}+\frac{3}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{2}}\right)$. Ввести в числитель $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ и интегрировать $\int\frac{\cos^2 x\,dx}{(3+\sin x)^2}$ по частям.

222. $\dfrac{-\cos x}{3\,(2+3\sin x)}-\dfrac{1}{9}x+\dfrac{2}{9\sqrt{5}}\log\dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+3-\sqrt{5}}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}+3+\sqrt{5}}$. Интегр. по частям.

223. $\dfrac{1}{18}y+\dfrac{1}{27}\log(1-3y)+\dfrac{5}{27\,(1-3y)}$, $y=\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}$.

224. $\dfrac{\sin x-1}{2\,(2+\cos x)^2}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sin x}{2+\cos x}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}\right)$.

Приводится к интегралам $\int\dfrac{dx}{(2+\cos x)^k}\,(k=3,\,2)$ и $\int\dfrac{\sin x\,dx}{(2+\cos x)^3}$.

225. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\log\dfrac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{tg}\,2x\right)$. Подстановка $y=\mathrm{tg}x$ или $z=\sin 2x$.

226. $\dfrac{1}{6}\log\dfrac{1+\sin 2x}{2-\sin 2x}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{2\,\mathrm{tg}x-1}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{tg}x=y$.

227. $2\log(y-1)-\log(y^2+y+2)$, $y=\mathrm{tg}x$.

228. $\dfrac{1}{2\sqrt{10}}\log\dfrac{3y+1+\sqrt{10}}{3y+1-\sqrt{10}}$, $y=\cos x$.

229. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\dfrac{1+y+\sqrt{2}}{1+y-\sqrt{2}}$, $y=\sin x$.

230. $\dfrac{x}{10}-\dfrac{3}{10}\log(\sin x+3\cos x)$, $y=\mathrm{tg}x$.

231. $\dfrac{1}{1-e^2}\cdot\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-e^2\cos^2 x}}$, $y=\sin x$.

232. $\dfrac{1}{2}\log\sin x-\dfrac{1}{6}\log\sin 3x$, $y=\sin x$.

233. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$, $y=\sin x$. **234.** $x-\log(1+\mathrm{tg}x)$, $\mathrm{tg}x=y$.

235. $x-\mathrm{tg}x+\log(1+\mathrm{tg}x)$, $y=\mathrm{tg}x$.

236. $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\log\cos 2x-\dfrac{1}{4}\log\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)$. Умножить числитель и знаменатель на $\sin x+\cos x$, выразить через триг. величины угла $2x$.

237. $\log\frac{\sqrt{1-\sin x\cos x}}{\cos x}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x-1}{\sqrt{3}}$, $y=\operatorname{tg}x$.

238. $\frac{1}{2(k+1)(b-a)}y^{k+1}$ при $k\gtrless-1$, $\frac{1}{2(b-a)}\lg y$ при $k=-1$,
$y=a\cos^2x+b\sin^2x$.

239. $\frac{1}{4}\log\operatorname{tg}2x$, $y=\operatorname{tg}2x$.

240. $\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}y+1}{\sqrt{2}y-1}+\frac{1}{4}\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $y=\cos x$.

241. $\frac{1}{8\sqrt{2}}\log\frac{1+\sqrt{2}\sin 2x}{1-\sqrt{2}\sin 2x}+\frac{1}{8}\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$, $y=\operatorname{tg}x$.

242. $-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}y+1}{\sqrt{3}y-1}$, $y=\cot x$.

243. $-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3\sqrt{3}}\log\frac{1+\sqrt{3}\cdot y}{1-\sqrt{3}\cdot y}$, $y=\operatorname{tg}x$.

244. $\frac{1}{2}\log\cos x-\frac{1}{6}\log\cos 3x$, $y=\cos x$.

245. $\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}\log\left(\sqrt[3]{\sin 3x}+y\sqrt[3]{4}\right)-\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}\log y-$
$-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{4}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{2\sin 3x}-y}{y\sqrt{3}}$, $y=\sin x$.

246. $\frac{1}{\log 2}\cdot\log\frac{2^x}{2^x+1}$, $y=2^x+1$.

247. $x-\log\left(\sqrt{1+e^x+e^{2x}}+1+\frac{1}{2}e^x\right)$, $y=e^{-x}$.

248. $x\sqrt{x}\left(\frac{2}{3}\log^2x-\frac{8}{9}\log x+\frac{16}{27}\right)$, $y=\lg x$ или по частям.

249. $\log\left\{\frac{x^2\lg^2x}{1+\lg x}\right\}$, $y=\log x$.

250. $\frac{x\log x}{\sqrt{1+x^2}}-\log(x+\sqrt{1+x^2})$. По частям.

251. $-\frac{\log x}{\sqrt{1+x^2}}-\log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$. По частям.

252. $2\sqrt{x+1}\log(x+2)-4\sqrt{x+1}+4\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x+1}$. По частям.

253. $-\frac{\log(x-2)}{2(x+1)^2}+\frac{1}{18}\log\frac{x-2}{x+1}-\frac{1}{18}\frac{x-2}{x+1}$. По частям.

254. $R[\log(x+1)-1]-\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{R-\sqrt{2}}{R+\sqrt{2}},\quad R=\sqrt{x^2+2x+3}$. По частям.

255. $-\frac{\log(x-1)}{2(x^2+1)}+\frac{1}{4}\log\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}x$. По частям.

256. $x\log(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$. По частям.

257. $\frac{1}{2}\log^2 y,\ y=x+\sqrt{1+x^2}$.

258. $-\frac{\log(x+1+R)}{x+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+R}{x+1},\ R=\sqrt{x^2+2x+3}$. По частям.

259. $\left(y+\frac{1}{3}y^3\right)\log y-y-\frac{1}{9}y^3,\ y=\operatorname{tg}x$.

260. $\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{32}\right)\arcsin x+\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1}{16}x^3+\frac{3}{32}x\right)$. По частям.

261. $x(y^3-6y)+\sqrt{1-x^2}(3y^2-6),\ y=\arcsin x$ (или по частям).

262. $\frac{\arcsin x}{1-x}-\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ По частям.

263. $\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}\arcsin(x^2)$. По частям.

264. $\frac{x\cdot\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\log(1-x^2)$. По частям.

265. $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$. По частям.

266. $-\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}+x$. По частям.

267. $2\sqrt{1+x}\arcsin x + 4\sqrt{1-x}$. По частям.

268. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}\cdot\arcsin x + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^3$. По частям.

269. $(1+x)\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{x}{1-x}}$. По частям или подстан. $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$.

270. $\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$. По частям или подстановкой $x = y^2$.

271. $(x+1)\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$. По частям или подстановкой $x = y^2$.

272. $\frac{1}{3}x^3\,\mathrm{arc\,tg}\,x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\log(1+x^2)$. По частям.

273. $-\frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{1+x} + \frac{1}{2}\log(1+x) - \frac{1}{4}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\mathrm{arc\,tg}\,x$. По частям.

274. $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arc\,tg}\,x - \log(x+\sqrt{1+x^2})$. По частям.

275. $-\mathrm{arc\,tg}\,x\cdot\sqrt{1-x^2} - \arcsin x - \sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}$. По частям.

276. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(x\cdot\mathrm{arc\,tg}\,x + 1)$. По частям.

277. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(x - \mathrm{arc\,tg}\,x)$. По частям.

278. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{arc\,tg}\,x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-x^2}}$. По частям.

279. $\frac{\mathrm{arc\,tg}\,x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}$. По частям.

280. $x\cdot\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$. По частям или подстановкой $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$.

281. $-\frac{x^2+1}{4(x^2-1)}\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{8}\operatorname{arc\,th}x$. По частям.

282. $-e^y$, $y=\cos^2 x$.

283. $e^{\sqrt{x}}\,(2x-4\sqrt{x}+4)$, $y=\sqrt{x}$.

284. $e^{-\frac{2}{x}}\left(\frac{1}{x}-1\right)$, $y=\frac{1}{x}$.

285. $\log(\log x-1)\log x=y$.

286. $\frac{-1}{x\lg x}$, $y=x\log x$.

287. $-\cot x.(\log\operatorname{tg}x+1)$. По частям.

288. $\sin x.\log\operatorname{tg}x-\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$. По частям.

289. $\frac{\log\sin x}{2\cos^2 x}-\frac{1}{2}\log\operatorname{tg}x$. По частям.

290. $\operatorname{tg}x\cdot(\lg\cos x+1)-x$. По частям.

291. $\log\sin x\cdot\left(\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x\right)-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}x$. По частям.

292. $-\frac{2e^{-x}}{\sqrt{x}}$. Интеграл $\int\frac{e^{-x}dx}{x\sqrt{x}}$ брать по частям.

293. $x\cot x$. Интеграл $\int\frac{-x\,dx}{\sin^2 x}$ берется по частям.

294. $\frac{e^x}{\sin^3 x}$, $\int\frac{e^x\cos x}{\sin^4 x}dx$ берется по частям.

295. $e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$. Начиная с $\int\frac{e^{-x}dx}{x^4}$, брать по частям.

296. $\frac{x}{2x+1}e^x$. Подстановка $2x+1=y$ и далее, как в 295.

297. $\frac{x}{\log x}$. Подстановка $y=\lg x$ и интегр. по частям.

298. $x^2\frac{\log x-1}{\log x+1}$. Подстановка $y=\lg x+1$ и интегр. по частям.

299. $\frac{-2}{\sqrt{x}\log x}$. Подстановка $\lg x=y$ и далее, как 295.

300. $-x\cos e^x+e^{-x}\sin e^x$. Брать по частям $\int xe^x\sin e^x dx$ и $\int e^{-x}\sin e^x dx$.

301. $-\frac{2\cos x}{\sqrt{\sin x}}$. Брать $\int\frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{\sin^3 x}}=\int\frac{d(-\cos x)}{\sqrt{\sin x}}$ по частям.

302. $\frac{x}{\sin x}$. Брать $\int \frac{-x\cos x dx}{\sin^2 x}$ по частям.

303. $-\frac{e^{-x^2}}{x}$. Брать $\int \frac{e^{-x^2}}{x^2} dx$ по частям.

304. $\frac{\sin x}{x}$. Брать $\int \frac{-\sin x}{x^2} dx$ по частям.

305. $2\log x \cdot (1 - \sqrt{1-x}) + 4\sqrt{1-x} - 4\log(1+\sqrt{1-x})$. По частям.

306. $\log x \cdot (1 - \sqrt{1-x^2}) + \sqrt{1-x^2} - \log(1+\sqrt{1-x^2})$. По частям.

307. $2\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)$, $y = \operatorname{th}\frac{x}{2}$.

308. $-\frac{\operatorname{ch}x}{2\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{2}\log\operatorname{th}\frac{x}{2}$, $y = \operatorname{th}\frac{x}{2}$.

309. $\operatorname{th}x - \frac{2}{3}\operatorname{th}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{th}^5 x$, $y = \operatorname{th}x$.

310. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{th}x\right)$, $y = \operatorname{th}x$.

311. $\frac{1}{13}(2\operatorname{ch}2x\cos 3x + 3\operatorname{sh}2x\sin 3x)$. По формуле с неопределенными коэффициентами.

312. $(0{,}2\,x\sin x - 0{,}12\cos x)\operatorname{sh}2x + (0{,}4\,x\cos x - 0{,}16\sin x)\operatorname{ch}2x$. Как 311.

313. $\operatorname{sh}3x\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{27}\right) - \frac{2}{9}x\operatorname{ch}3x$. По частям.

314. $\frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{arcth}x + \frac{1}{2}x$. По частям.

315. $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right)\operatorname{arc\,sh}x - \frac{1}{4}x\sqrt{1+x^2}$. По частям.

316. $\log\operatorname{sh}x \cdot \operatorname{th}x - x$. По частям.

317. $\operatorname{ch}x \cdot \log\operatorname{th}x - \log\operatorname{th}\frac{x}{2}$. По частям.

318. $\frac{-\operatorname{sh}x}{2+\operatorname{ch}x} + x - \frac{2}{\sqrt{3}}\log\frac{\sqrt{3}+\operatorname{th}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\operatorname{th}\frac{x}{2}}$. По частям.

319. $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+\log y+C.$

320. $\sqrt{1+xy}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}+e^x\sin 2y+\log\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+C.$

321. $x\sqrt{1-y^3}+\log(x+\sqrt{x^2+y^2})+\arcsin\dfrac{x}{y}+2\sqrt{y}+C.$

322. $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\log(x-2y)+\arcsin\sqrt{xy}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{y}{\sqrt{y^2+1}}+C.$

323. $\log(x^2+y^2)+x^2\sqrt{1+y}-\operatorname{arctg}xy+x\log x-x-$

$$-\log\frac{1+\sqrt{y^2+1}}{y}+C.$$

324. $\log(xyz)+\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\arcsin\dfrac{x}{yz}+x+y+z+C.$

325. $\log(x+3y-4z)+\sqrt{x^2+xz+z^2}+\operatorname{arctg}\sqrt{yz}+z+$

$$+\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}-z+C.$$

326. $\operatorname{arctg}(xyz)+\log(x^2+z^2)-\sqrt{\dfrac{y}{z}}+x^2-y+z+C.$

327. $\operatorname{arctg}\sqrt{xyz}+\log\dfrac{x+z}{x-z}+\sqrt{\dfrac{y+z}{y-z}}+\log(x^2-x+1)+$

$$+y\operatorname{tg}y+\log\cos y+\log\log z+C.$$

328. $\log(x^2+y^2-z^2)+\sqrt{\dfrac{x-z}{x+z}}+\arcsin\dfrac{y}{z}+\dfrac{1}{2}\log^2 x-$

$$-\frac{\sqrt{1+y^2}}{y}+2\sqrt{\sin z}+C.$$

329. $u=x^2yz+\dfrac{x}{z}-\dfrac{y}{z^2}$. Пользоваться формулой $u(x,y,z)=$

$$=u(x_0,y_0,z_0)+\int_{x_0}^{x}M(x,y,z)\,dx+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y,z)\,dy+\int_{z_0}^{z}P(x_0,y_0,z)\,dz.$$

330. $u=x^2y+y^2z+z^2x+xyz$. См. указ. n^0 329.

ОТДЕЛ III.

Геометрические приложения дифференциального исчисления.

1—22. При решении задач n^0 1—22 следует иметь в виду формулы:

$$S_t = -y\cot\alpha,\quad S_n = y\,\mathrm{tg}\,\alpha,\quad T = \left|\frac{y}{\sin\alpha}\right|, N = \left|\frac{y}{\cos\alpha}\right|,\quad X_t = \frac{x\sin\alpha - y\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$Y_t = -\frac{x\sin\alpha - y\cos\alpha}{\cos\alpha},\quad L_t = \left|\frac{x\sin\alpha - y\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right|,\quad P_t = |x\sin\alpha - y\cos\alpha|,$$

$$X_n = \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad Y_n = \frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\sin\alpha},\quad L_n = \left|\frac{x\cos\alpha + y\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right|,$$

$P_n = |x\cos\alpha + y\sin\alpha|$, где α угол касательной с осью абсцисс $\left(\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{dy}{dx}\right)$. Легко доказать, что во всех этих задачах $\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\,t$, откуда получается $\alpha = t$; введя в предыдущие выражения вместо α букву t, без труда проверяем все результаты.

23—30. В задачах 23—30 следует найти выражение $\mathrm{tg}\,\alpha = y'$ в виде функции от x, y, внести его в формулы:

$S_n = yy'$, $X_t = x - \frac{y}{y'}$, $Y_t = y - xy'$ и проч., после чего требуемые результаты приводятся к простым тождествам.

31—37. В задачах 31—37 следует принять во внимание формулы:

$$S_t = r\,\mathrm{tg}\,\mu,\ S_n = r\cot\mu,\ T = \left|\frac{r}{\cos\mu}\right|, N = \left|\frac{r}{\sin\mu}\right|, P_t = |r\sin\mu|, P_n = |-r\cos\mu|,$$

где μ угол между радиусом-вектором и касательной $\left(\mathrm{tg}\,\mu = \frac{rd\theta}{dr}\right)$.

Легко доказать, что во всех этих задачах $\frac{rd\theta}{dr} = \mathrm{tg}\,u$, откуда следует $\mu = u$; введя $\mu = u$ в предыдущие формулы, без труда получим требуемые соотношения.

38—40. В этих задачах нужно определить угол μ через θ $\left(\mathrm{tg}\,\mu = \frac{rd\theta}{dr}\right)$, после чего требуемые зависимости превращаются в простые тождества.

41—43. В этих задачах нужно показать, что $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$, откуда следует, что $t = \alpha$ (углу касательной с осью x), и потому $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\cos t}\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt}$; задача приводится к установлению тождества: $\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}f(y)$.

44—45. Задача приводится к установлению тождества: $ds = d\left(\frac{y^2}{T}\right)$, $ds = d\left(\frac{1}{\sqrt{a}}y^{3/2}\right)$.

46—48. Нужно доказать, что $\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\theta}{dr} = \operatorname{tg} u$, откуда следует: $\mu = u$ и $ds = Nd\theta = \frac{1}{\cos\mu}dr = \frac{1}{\cos u}dr$. Задача приводится к установлению тождества $\frac{1}{\cos u}\cdot\frac{dr}{du} = \frac{d}{du}[f(r, u)]$, где $f(r, u) = N$ или S_t или P_t.

49. Нужно доказать, что $\frac{ds}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{r}{\cos\mu}\right)$.

50—62. В этих задачах нужно составить для обоих уравнений каждой системы значения производных y', свободные от параметров a и b, и доказать, что $y_1' \cdot y_2' + 1 = 0$ (условие ортогональности).

63—64. Здесь нужно составить для каждой из 2 кривых значения угла μ в виде функции от θ и доказать, что разность их $\mu_2 - \mu_1$ равна $\frac{\pi}{2}$ или ω.

65—68. Координаты параллельных кривых определяются формулами: $x_1 = x - k\sin\alpha$, $y_1 = y + k\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$.

65. $x_1 = \frac{1}{2}p\cot^2\alpha - k\sin\alpha$, $y_1 = p\cot\alpha + k\cos\alpha$.

66. $x_1 = -a\cos^3 t - k\sin t$, $y_1 = a\sin^3 t + k\cos t$.

67. $x_1 = a(t - \sin t) - k\cos\frac{t}{2}$, $y_1 = a(1 - \cos t) + k\sin\frac{t}{2}$.

68. $x_1 = a\cos\theta(1 + \cos\theta) - k\cos\frac{3}{2}\theta$, $y_1 = a\sin\theta(1 + \cos\theta) - k\sin\frac{3}{2}\theta$.

69—75. Уравнение подэры относ. точки (x_0, y_0) получается исключением букв x, y из системы:

$$Y-y=y'(X-x),\ Y-y_0=-\frac{1}{y'}(X-x_0).$$

69. $2X(X^2+Y^2)+pY^2=0.$ **70.** $X=0.$

71. $(X^2+Y^2)^2=4a^2XY.$

72. $(X^2+Y^2)^\lambda=(aX)^{\lambda,\lambda}+(bY)^\lambda=\frac{n}{n-1}.$

73. $27Y(X^2+Y^2)^2+4a^2X^3=0.$ **74.** $(X^2+Y^2)^3=a^2X^2Y^2.$

75. $r=a\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right).$

76—84. Полярные координаты точек подэры будут: $\rho=r\sin\mu$, $\varphi=\mu+\theta-\frac{\pi}{2}\left(tg\,\mu=\frac{rd\theta}{dr}\right)$; исключение θ из этих уравнений дает уравнение подэры.

76. $\rho^{2/3}=a^{2/3}\cos\frac{2}{3}\varphi.$ **77.** $\rho=a(1+\cos\varphi).$

78. $\rho=\frac{a}{2}\left(\cos\varphi+3\cos\frac{\varphi}{3}\right).$ **79.** $\rho^2=a^2\cos 2\varphi.$

80. $\rho=\frac{a}{2\cos\varphi}.$ **81.** $\rho^\lambda=a^\lambda\cos\lambda\varphi,\ \lambda=\frac{k}{k+1}.$

82. $\rho=\frac{a\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}},\ \varphi=\theta-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg}\theta.$

83. $\rho=ae^{m(\varphi-\varphi_0)},\ \varphi_0=\frac{1}{2m}\log(1+m^2)-\operatorname{arc\,tg} m.$

84. $\rho=a\sqrt{2}\cos^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varphi}{2}\right).$

85—95. Из формулы $\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}$ нужно определить угол α, как функцию от t, и затем вычислить R по формуле: $R=\frac{ds}{dt}:\frac{d\alpha}{dt}.$

85. $b+at.$ **86.** $4a\,.\,\frac{n+1}{n+2}\sin\frac{nt}{2}.$

87. $3a\sin t\cos t.$ **88.** $15a\sin^4 t=5\sqrt[5]{3ax^4}.$

89. $8a\cos^3 t = 4\sqrt[4]{2ay^3}$. **90**. $3a\sin^2 t = 3\sqrt[3]{ax^2}$.

91. $at^2 = \sqrt{x^2+y^2-4a^2}$. **92**. $\dfrac{6a}{\cos^4 t} = 3y\sqrt[3]{\dfrac{y}{2a}}$.

93. $2ae^{-t} = \sqrt{2(x^2+y^2)}$.

94. $4a(1+t^2)^{5/2} = 4a\left(\dfrac{y}{a}\right)^{5/4} = 4N$ (N длина нормали).

95. $\dfrac{ak}{\cos^{k+1} t} = k\cdot N$.

96—108. Доказать сперва, что $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$, откуда следует $\alpha = t$; затем вычислить R по формулам:

$$R = \frac{1}{\cos t}\cdot\frac{dx}{dt} \text{ или } R = \frac{1}{\sin t}\cdot\frac{dy}{dt}, \text{ или } R = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

109—118. Доказать, что $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{tg} t$, и следовательно $\alpha = t$, выразить через t радиус кривизны $R = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{\cos t}\,\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{\sin t}\cdot\dfrac{dy}{dt}$ и длину дуги $s = \int\limits_0^t \dfrac{ds}{dt}\,dt = \int\limits_0^t R\,dt$, после чего требуемый результат приводится к простому тождеству.

119—129. Доказать сперва, что $\operatorname{tg}\mu = \dfrac{r\,d\theta}{dr} = \operatorname{tg} u$, откуда следует $\mu = u$; затем составить выражения:

$$\frac{d\alpha}{du} = \frac{d\theta}{du} + 1,\quad \frac{ds}{du} = N\frac{d\theta}{du} = \frac{r}{\sin u}\cdot\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{\cos u}\cdot\frac{dr}{du},$$

и тогда получится выражение R:

$$R = \frac{ds}{du} : \frac{d\alpha}{du} = \frac{\dfrac{dr}{du}}{\left(1+\dfrac{d\theta}{du}\right)\cos u} = \frac{r}{\sin u}\cdot\frac{\dfrac{d\theta}{du}}{1+\dfrac{d\theta}{du}},$$ которое можно представить в виде:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos u}{\dfrac{dr}{du}} + \frac{\sin u}{r} = \frac{\dfrac{d}{du}(r\sin u)}{r\cdot\dfrac{dr}{du}}.$$

Пользуясь одним из приведенных выражений R, а также формулами, данными в реш. 31—37, легко проверяем все требуемые соотношения.

130—132. Определить угол μ $\left(\operatorname{tg}\mu = \frac{r d\theta}{dr}\right)$ через θ, найти затем $\alpha = \mu + \theta$ и вычислить $R = \frac{ds}{d\alpha}$, при чем $N = \frac{ds}{d\theta}$.

133—149. Выразить угол α $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}\right)$ через t, составить $\frac{d\alpha}{dt}$ и вычислять координаты точек эволюты по формулам:

$$x_c = x - \frac{dy}{dt} : \frac{d\alpha}{dt}, \quad y_c = y + \frac{dx}{dt} : \frac{d\alpha}{dt}.$$

В ответах значки $_c$ при x и y опущены.

133. $\left(x^2 + y^2 - \frac{a^2}{9}\right)^2 = \frac{4}{9}a^2\left[\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 + y^2\right]$, $\alpha = \frac{3}{2}t$.

134. $(x^2 + y^2 - a^2)^3 = \frac{27}{4}a^4x^2$, $\alpha = 2t$.

135. $(x + y)^{2/3} + (x - y)^{2/3} = 2a^{2/3}$, $\alpha = t$.

136. $27py^2 = 8(x - p)^3$, $\alpha = t$.

137. $x^2 + y^2 = a^2$, $\alpha = t$.

138. $x = ae^{-t}(\cos t + \sin t)$, $y = ae^{-t}(\sin t - \cos t)$, $\alpha = t$.

139. $x = 2a\,(t\cos t - \sin t)$, $y = 2a\,(t\sin t + \cos t)$, $\alpha = t$.

140. $x = 3a\left[\log\,\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right) - \frac{\sin t\,(1 + \sin^2 t)}{\cos^4 t}\right]$, $y = \frac{8a}{\cos^3 t}$, $\alpha = t$.

141. $x = -4at^3\left(t^2 + \frac{5}{3}\right)$, $y = 5a\,(1 + t^2)^2$, $\alpha = \operatorname{arc\,tg} t$.

142. $x = a(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$, $\alpha = \pi - \frac{1}{2}t$.

143. $y^2 = 2px$, $\alpha = t$.

144. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} - t$.

145. $x = t - \frac{a}{2}\operatorname{sh}\frac{2t}{a}$, $y = 2a\operatorname{ch}\frac{t}{a}$, $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\operatorname{sh}\frac{t}{a}$.

146. $x = \frac{a^4 + 3t^4}{2t^3}$, $y = \frac{3a^4 + t^4}{2a^2 t}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a^2}{t^2}$.

147. $x=\dfrac{t(a^4-t^4)}{2a^4}$, $y=\dfrac{5t^4+3a^4}{6a^2t}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{t^2}{a^2}$.

148. $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{b\cos t}{a\sin t}$.

149. $(ax)^{2/3}-(by)^{2/3}=(a^2+b^2)^{2/3}$, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{b\operatorname{ch}t}{a\operatorname{sh}t}$.

150 — 153. Выразить угол μ $\left(\operatorname{tg}\mu=\dfrac{rd\theta}{dr}\right)$ через θ и отсюда найти $\alpha=\mu+\theta$, $\dfrac{d\alpha}{d\theta}=\dfrac{d\mu}{d\theta}+1$. Затем координаты точек эволюты найдутся по формулам:

$x_c=x-\dfrac{dy}{d\theta}:\dfrac{d\alpha}{d\theta}$, $y_c=y+\dfrac{dx}{d\theta}:\dfrac{d\alpha}{d\theta}$, при чем $x=f(\theta)\cos\theta$, $y=f(\theta)\sin\theta$, если $r=f(\theta)$ есть уравнение данной кривой.

150. $x=-a\sin\theta+\dfrac{a(\sin\theta+\theta\cos\theta)}{2+\theta^2}$, $y=a\cos\theta-\dfrac{a(\cos\theta-\theta\sin\theta)}{2+\theta^2}$; $\dfrac{d\alpha}{d\theta}=\dfrac{2+\theta^2}{1+\theta^2}$.

151. $(x^{2/3}+y^{2/3})(x^{2/3}-y^{2/3})^{\frac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}a$ (получается исключением θ из системы: $x=\dfrac{2a\cos^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}$, $y=-\dfrac{2a\sin^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}}$), $\dfrac{d\alpha}{d\theta}=3$.

152. $x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{6}(2\cos\theta-\cos 2\theta)$, $y=\dfrac{a}{6}(2\sin\theta+\sin 2\theta)$, $\dfrac{d\alpha}{d\theta}=\dfrac{3}{2}$.

153. $x=\dfrac{a}{2(n+1)(\cos n\theta)^{\frac{n-1}{n}}}\Big[(n-1)\cos(n+1)\theta+(n+1)\cos(n-1)\theta\Big]$

$y=\dfrac{a}{2(n+1)(\cos n\theta)^{\frac{n-1}{n}}}\Big[(n-1)\sin(n+1)\theta-(n+1)\sin(n-1)\theta\Big]$,

$\dfrac{d\alpha}{d\theta}=n+1$.

154. $y^2=2px+p^2$.

155. $\dfrac{x^2}{a^2+b^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

156. $\dfrac{1}{2}x^2+y^2=a^2$.

157. $x^2+y^2=(R\pm r)^2$.

158. $(x^2+y^2-2ax-2by)^2=4R^2(x^2+y^2)$. **159.** $y^2=\frac{2p^2}{q}x$.

160. $xy=\frac{a^4}{b^2}$. **161.** $\frac{h^2x^2}{a^4}+\frac{k^2y^2}{b^4}=1$.

162. $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{a^2+b^2}$. **163.** $\frac{2x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{b^2}=1$.

164. $x=\frac{v}{2\omega}(u+\sin u)$, $y=\frac{v}{2\omega}(1-\cos u)$, $u=2\omega t$; t — время, протекшее от того момента, когда подвижная прямая совпадала с осью x и движущаяся точка совпадала с началом координат.

165. $\sqrt{v_2x}-\sqrt{-v_1y}=\sqrt{a_1v_2-a_2v_1}$ (переменная прямая $\frac{x}{a_1+v_1t}+\frac{y}{a_2+{}_2vt}=1$),

166. $(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}=(a\sqrt{2})^{2/3}$ [переменная прямая $\alpha x-\beta y=\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)$ при $\alpha^2+\beta^2=a^2$].

167. $x^{2/3}+y^{2/3}=(2a)^{2/3}$ (переменная прямая $x\sin t+y\cos t=a\sin 2t$).

168. Огибающая общая: $x=R\cos t+\frac{p}{2}\mathrm{tg}^2t$, $y=R\sin t-p\,\mathrm{tg}\,t$ [траектории $(y-R\sin t)^2=2p(x-R\cos t)$].

169. Огибающая общая: $x=R\cos t+\frac{a^2\cos t}{\sqrt{a^2\cos^2t+b^2\sin^2t}}$, $y=R\sin t+\frac{b^2\sin t}{\sqrt{a^2\cos^2t+b^2\sin^2t}}$ $\left(\text{траектории: }\frac{(x-R\cos t)^2}{a^2}+\frac{(y-R\sin t)^2}{b^2}=1\right)$.

170. Огибающая общая: $x=R\cos t+a\sqrt{\mathrm{tg}\,t}$, $y=R\sin t+a\sqrt{\mathrm{cot}\,t}$ [траектории $(x-R\cos t)(y-R\sin t)=a^2$].

171. $\frac{x^2}{4a^2}+\frac{y^2}{4b^2}=1$ и точка $(0, 0)$.

172. $x^{2/3}+y^{2/3}=c^{2/3}$. **173.** $4x^2y^2=c^4$.

174. $x\pm y=\pm c$ (квадрат). **175.** $\frac{1}{x}\pm\frac{1}{y}=\pm\frac{1}{c}$ (дуги 4 гипербол).

176. $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}=\sqrt{c}$. **177.** $x^2y^2=c^2(x^2+y^2)$.

178. $y^2 = 2ax$. **179**. $4y^3 = 27ax^2$.

180. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$. **181**. $x^2 + y^2 = 2ax$.

182. $4xy = a^2$. **183** $\sqrt{\frac{x}{m}} + \sqrt{\frac{y}{n}} = 1$.

184. $x^\lambda + y^\lambda = a^\lambda,\ \ \lambda = \frac{k}{k+1}$. **185**. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

186. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$ (перенеся начало в точку (x_0, y_0), получаем в новой системе уравнение касательной $\alpha x + \beta y = 1$ при $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{a^2}$).

187. $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Касательные: $\alpha x + \beta y = 1$ при условии:
$a^2\alpha^2 \mp b^2\beta^2 = 1$, где $a^2 = c^2 \mp b^2$).

189. Перегиб: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$. Ассимптоты: $x = 0$ и $y = 1$. Начало—точка прекращения.

190. Ассимптоты : $x = 0$ и $y = 1$.

191. Вершина (maximum) : (0, 1). Перегибы : $\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$. Ассимптота : $y = 0$.

192. Вершина (max) : $\left(1, \frac{1}{e}\right)$. Перегиб : $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$. Ассимптота $y = 0$.

193. Вершины min. (0,0), max. $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$. Перегибы : при $x = 2 \pm \sqrt{2}$. Ассимптота : $y = 0$.

194. Вершины : min. $\left(-2, -\frac{8}{\sqrt{e^3}}\right)$, max $\left(2, \frac{8}{\sqrt{e^3}}\right)$. Перегибы : при $x = \pm 2\sqrt{2}$, $x = 0$, $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Ассимптота $y = 0$.

195. Вершина : min. (0,2). Две бесконечные ветви, левая с ассимптотой : $y + x = 1$.

196. Ассимптота : $2x - 4y = 1$. В начале—угловая точка с касательными $y = 0$, $y = x$.

197. При $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ — пересечения кривой с осью x,

при $x=\frac{8k-1}{4}\pi$ — maxima $y=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{8k-1}{4}\pi}$

при $x=\frac{8k+3}{4}\pi$ — minima $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{8k+3}{4}\pi}$

при $x=k\pi$ — точки перегиба.

198. Вершина : min. $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{-1}{2e}\right)$. Перегиб : $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, \frac{-3}{2e^3}\right)$.
Начало — точка прекращения.

199. Вершина : min. $\left(\frac{1}{e}, \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\right)$. В 0,1 — точка прекращения.

200. При $\frac{m}{n}<0$ — ассимптоты $x=0$, $y=0$; при $0<\frac{m}{n}<1$ — в начале (при касательной $x=0$) : вершина, если n четн., m нечетн.; возврат, если n нечетн., m четное; перегиб, если n и m нечетные; при $\frac{m}{n}>1$ в начале (при касательной $y=0$) : возврат, если n четное, m нечетное; вершина, если n нечет., m четное; перегиб, если n и m нечетные.

201. Вершины : max $(-2, 2.1)$, min $(1, -0.6)$. Перегиб $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

202. Вершины : min $(0, 0.5)$, max $(1, 0.6)$, min $(2, 0.5)$. Перегибы при $x=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

203. Вершины : max $(-2, -0.6)$, min $(-1, -2.8)$, max $(1, 4.8)$, min $(2, 2.6)$. Перегибы : $(0, 1)$, $\left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{10},\ 1\pm\frac{13}{16}\sqrt{10}\right)$.

204. 4 ассимптоты : $x=0$, $x=1$, $x=2$, $y=0$. 2 точки перегиба.

205. Вершины : max $\left(-1, \frac{3}{2}\right)$, min $\left(+1, \frac{1}{2}\right)$. Перегибы : $(0, 1)$, $\left(\pm\sqrt{3},\ 1\mp\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Ассимптота : $y=1$.

206. Вершина : max $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ Ассимптоты : $x = -1$, $x = 2$, $y = 1$.

207. Вершины : max $(-1, 2)$, min $(1, 0)$. Перегибы : $(0, 1)$, $\left(\mp\sqrt{3}, 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$. Ассимптота : $y = 1$.

208. Вершины : max $(2k\pi, 1)$, min $\left[\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, max $\left[\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi, 1\right]$, min $\left((2k+1)\pi, -1\right)$, max $\left[\left(2k+\frac{5}{4}\right)\pi, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, min $\left[\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi, -1\right]$. Перегибы : при $x = \left(k+\frac{3}{4}\right)\pi$, $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3} + k\pi$, $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi - \frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}$.

209. Вершины : max $\left(k\frac{\pi}{2}, 1\right)$, minima $\left((2k+1)\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Перегибы $\left((4k+1)\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4}\right)$.

210. Перегиб : $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Ассимптоты : $x = -1$, $x = 2$.

211. Ассимптоты : $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$.

212. Вершина (max) при $x = -\frac{1}{2}$. Перегибы : при $x = 0$, $\frac{-5 \pm \sqrt{45}}{10}$. Ассимптоты : $x = 1$, $y = 0$.

213. Вершины : min при $x = -2$, max при $x = 0$ (возврат). Перегибы : при $x = \frac{-4 \pm 3\sqrt{2}}{2}$. Ассимптоты : $x = 1$, $y = 0$.

214. В точке (1, 0) касат. параллельна оси y. При $x = \frac{3+\sqrt{3}}{4}$ — перегибы. В начале возврат 1-го рода.

215. Вершина : min $\left(\frac{3}{4}, \pm\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)$; перегибы при $x = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$. Начало возврат 1-го рода. В точке (1, 0) — касат. параллельна оси y.

216—232. Корни уравнения $\frac{dx}{dt}=0$ (нечетной кратности) определяют точки кривой с касательными параллельными оси y; корни уравнения $\frac{dy}{dt}=0$ (нечетной кратности) определяют точки, где касательные параллельны оси x. Корни уравнения: $\left(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\right):\left(\frac{dx}{dt}\right)^3=0$ (нечетной кратности) определяют точки перегиба. Если при $t=t_0$ оказывается $x=\infty$, $y=\infty$, при чем пред. $\frac{y}{x}=a$ (при $t=t_0$), то существует ассимптот. направление с угловым коэффициентом a; если притом пред. $(y-ax)=b$ при $t=t_0$, то прямая $y=ax+b$ будет ассимптотой.

216. $t=0$ дает x minimum $=0$, $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ дает точки перегиба $\left(\frac{4}{3}a,\pm\frac{4a\sqrt{3}}{9}\right)$, $t=\pm\infty$ определяет 2 бесконечные ветви (параболические).

217. $t=\frac{1}{2}$ дает $x\max=\frac{a}{4}$, $t=\frac{2}{3}$ дает $y\max=\frac{4}{27}a$; $t=0$ дает $y\min=0$; $t=\pm\infty$ определяет 2 бескон. параболические ветви. В начале узел с касат. $y=0$ $(t=0)$ и $y=x$ $(t=1)$.

218. $t=0$ дает $x\min=0$; $t=-\frac{2}{3}$ дает $x\max=\frac{4a}{27}$, $t=-\frac{3}{4}$ дает $y\min=-\frac{27a}{256}$; $t=\pm\infty$ определяет 2 парабол. ветви.

219. $t=0$ дает $x\max=a$; $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ дает крайние значения $y=\pm\frac{2a\sqrt{3}}{9}$; $t=\pm\infty$ определяет 2 параболические ветви. В начале узел с касательными : $y=x$ $(t=1)$, $y=-x$ $(t=-1)$.

220. $t=0$ дает точку пересечения с осью $x:(a,\ 0)$; $t=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ дает $y\max=\frac{3}{8}a\sqrt[3]{2}$, $t=1$ дает точку сплющенности с касательной $y=x$, $t=\pm\infty$ дает 2 параболические ветви.

221. $t=1$ дает $x\min=0$, $y\min=0$; $t=\frac{1}{3}$ дает $y\max=\frac{4}{27}a$; $t=0$ дает пересечение с осью x $(a, 0)$; $t=\pm\infty$ определяет 2 параболические ветви. В начале $(t=1)$ возврат 1 рода с касат. $y=x$.

222. $t=0$ дает $x\min=0$; $t=-2$ дает $x\max=-4a$; $t=-\frac{3}{2}$ дает $y\min=\frac{27}{4}a$; $t=-3$ дает перегиб $\left(-\frac{9}{2}a, \frac{27}{2}a\right)$; $t=-1$ дает бескон ветви с ассимптотою $x+y-a=0$. В начале $(t=0)$ возврат 1-го рода; $t=\pm\infty$ дает 2 параболич. ветви.

223. При $t=-\frac{3}{2}$ $x\min=\frac{27}{4}a$; при $t=0$ $y\min=0$; при $t=-\frac{4}{3}$ $y\max=-\frac{256}{27}a$; при $t=-2$ перегиб $(8a, -16a)$; при $t=-1$ — две бесконечные ветви с ассимптотой $x+y+a=0$; при $t=\pm\infty$ — две бескон параболические ветви.

224 При $t=-\sqrt{3}$ $x\min=\frac{3\sqrt{3}}{2}a$; при $t=+\sqrt{3}$ $x\max=-\frac{3\sqrt{3}}{2}a$; при $t=\pm\sqrt{2}$ $y\max=-4a$; при $t=0$ $y\min=0$; при $t=\pm\sqrt{6}$ — два перегиба $(\pm 1{,}2\sqrt{6}a, -7{,}2a)$, при $t=+1$ бескон. ветви с ассимптотой $y-x+\frac{1}{2}a=0$; при $t=-1$ бескон. ветви с ассимптотой $y+x+\frac{1}{2}a=0$; при $t=\pm\infty$ — параболич. ветви.

225. При $t=0$ $y\min=0$, при $t=\pm\infty$ — две параболич. ветви.

226. При $t=0$ $x\min=0$, при $t=-\sqrt{3}$ $y\min=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ a, при $t=+\sqrt{3}$ $y\max=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ a, при $t=\pm\infty$ — две бескон. ветви с ассимптотою $x=-a$; при $t=-1$ — ветви с ассимптотою $x+y=\frac{a}{2}$, при $t=+1$ — ветви с ассимптотою $x-y=\frac{a}{2}$. В начале $(t=0)$ возврат 1-го рода с касательной $y=0$.

227. При $t = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ y min $= -\frac{1}{3}a\sqrt[3]{4}$; при $t = 0$ — перегиб $(a, 0)$; при $t = \pm\infty$ точка возврата $(0, 0)$ с касательной $x = 0$; при $t = 1$ бескон. ветви с ассимптотою $y - x + \frac{a}{3} = 0$.

228. При $t = 0$ x min $= 0$; при $t = \sqrt[3]{2}$ x max $= \frac{a}{3}\sqrt[3]{4}$; при $t = \pm\infty$ — перегиб $(0, a)$; при $t = -1$ бескон. ветви с ассимптотою $x + y - \frac{a}{3} = 0$. В начале $(t = 0)$ возврат 1-го рода с касат. $y = 0$.

229. При $t = 0$ y min $= 0$; при $t = -\sqrt[3]{4}$ y max $= -\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}\,a$; при $t = -1$ две ветви с ассимптотою $x + y + \frac{a}{3} = 0$, при $t = \pm\infty$ две ветви с ассимптотою $x = a$.

230. При $t = 0$ y min $= 0$; при $t = 1$ две ветви с ассимптотою $y - x + a = 0$, при $t = -1$ — две ветви с ассимптотою $y + x + a = 0$; при $t = -1 \pm \sqrt{2}$ — точки пересечения кривой с первою ассимптотою и при $t = 1 \mp \sqrt{2}$ – точки пересечения со второю ассимптотою; при $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ — перегибы $(\pm 2a\sqrt[4]{27},\ 2a\sqrt{3})$; $t = \pm\infty$ дает точку возврата $(0, 0)$ с касательною $x = 0$.

231. При $t = 0,\ \pi$ x min $= 0$; при $t = \frac{\pi}{2}$ x max $= 2a$, $y = \infty$, т.е. существуют 2 бесконечные ветви с ассимптотою $x = 2a$; в начале возврат 1-го рода с касательною $y = 0$.

232. При $t = \pm\pi$ x min $= -a$; при $t = \pm\frac{\pi}{2}$ — узел с касательными $y = \pm x$, при $t = \pm$ arc cos $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ — крайние значения $y = \pm\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{\sqrt{5} - 2}$; $t = 0$ дает x max $= a$ и определяет две бесконечные ветви с ассимптотою $x = a$.

233—241. Точки перегиба определяются при совместном решении уравнения кривой и уравнения ее Гессианы.

233. $(0, -a)$. **234.** $(9a, -27a)$. **235.** $\left(\pm\frac{4}{\sqrt{3}}a, 4a\right)$.

236. $(\pm 6\sqrt{6}a, 36a)$. **237.** $(-2a, a)$. **238.** $(a\sqrt{3}, \pm a\sqrt[4]{27})$.

239. $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}a\right)$. **240.** $\left(\frac{1}{3}a, 36a\right)$. **241.** $(9a, -3a)$.

242—247. Точки перегиба определяются корнями нечетной кратности уравнения $\frac{1}{r} + \left(\frac{1}{r}\right)'' = 0$ или уравнения $r^2 + 2r'^2 - rr'' = 0$ (производные взяты по θ).

242. 2 точки перегиба: $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$.

243. 4 перегиба при $\operatorname{tg}\theta = \pm 2$.

244. 4 перегиба при $\operatorname{tg}\theta = \pm\sqrt{15}$.

245. 2 перегиба при $\cos\theta = -\frac{17}{18}$.

246. 4 перегиба: при $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = -2(5 - \sqrt{21})$.

247. 1 перегиб: при $\operatorname{tg}\theta = -\frac{1}{3}$.

248. 2 перегиба: при касательной $y = 2x$ нисходящий и при касательной $y = 3x$ — восходящий.

249. Завиток между касательными $y = x$, $y = 3x$, расположенный внутри угла положит. координат.

250. Два перегиба при общей касательной $x + 2y = 0$.

251. Точка возврата 1-го рода с касательной $x = 3y$ при $x > 0$.

252. 2 ветви: $y = (2 + \varepsilon)x^2$, $y = (3 + \varepsilon)x^2$ касаются оси x.

253. 2 ветви: $y = (-1 + \varepsilon)x^2$, $y = (2 + \varepsilon)x^2$ касаются оси x.

254. Возврат 2-го рода с касательной $y = 0$ при $x < 0$, $y > 0$: $y = x^2(1 \pm \sqrt{-x})(1 + \varepsilon)$.

255. Возврат 2-го рода с касательной $y = 0$ при $x > 0$, $y > 0$: $y = \frac{1}{2}x^2(1 \pm \sqrt{x})(1 + \varepsilon)$.

256. Нисходящий перегиб с касательною $x = 0$.

257. Точка сплющенности при $x < 0$.

258. Восходящий перегиб с касательною $y = 0$.

259. Нисходящий перегиб с касательною $y = 0$.

260. 4 ветви: $y = \pm 2\sqrt{-x}\,(1+\varepsilon)$, $y = x^2(1+\varepsilon)$,

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{33}{64}x^2 \ldots, \quad y = -\frac{1}{2}x - \frac{31}{64}x^2 \ldots$$

261. 3 ветви: $y = \sqrt[3]{x}(1+\varepsilon)$, $y = -2x^2(1+\varepsilon)$, $y = x + 2x^2 \ldots$.

262. 4 ветви: $y = \pm\sqrt{2x}\,(1+\varepsilon)$, $y = -x^3(1+\varepsilon)$,

$$y = \frac{1}{4}x + a^2x^3 \ldots$$

263. 5 ветвей: $y = \pm\sqrt[4]{x}(1+\varepsilon)$, $y = \pm(-x)^{3/2}(1+\varepsilon)$,

$$y = x + \frac{1}{2}x^2 \ldots, \quad y = -x - \frac{1}{2}x^2 \ldots$$

264. 5 ветвей: $y = x^{2/3}(1+\varepsilon)$, $y = x^3(1+\varepsilon)$, $y = x + \frac{1}{2}x^2 \ldots$,

$$y = -x + \frac{1}{2}x^2 \ldots$$

265. 3 ветви: $y = x^{1/3}(1+\varepsilon)$, $y = \pm x^{3/2}(1+\varepsilon)$.

266. 3 ветви: $y = \pm\sqrt{-x}\,(1+\varepsilon)$, $y = \pm x^2(1+\varepsilon)$.

267. 2 ветви: $y = \pm\sqrt[4]{2x}(1+\varepsilon)$, $y = \frac{1}{2}x^4(1+\varepsilon)$.

268. $x - 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$.

269. $y + 1 = 0$, $x - 2y = 0$, $x + y + 1 = 0$.

270. $x = 0$, $2x - y = 0$, $x - y + 1 = 0$.

271. $y = 0$, $x + y = 0$, $2x - y + 1 = 0$.

272. $x + 2 = 0$, $x - 2y = 0$, $2x - y = 0$.

273. $y - 2 = 0$, $3x - y = 0$, $x + y = 0$.

274. $y = 0$, $3x - y + 1 = 0$, $x - y = 0$.

275. $x = 0$, $x + 3y - 1 = 0$, $x + 2y = 0$.

276. $y = \pm\frac{1}{2}x + \frac{1}{32}$. **277.** $x = 0$, $x + y - \frac{1}{3} = 0$.

278—285. Если при $\theta = \theta_0$ оказывается $r = \infty$ и пред. $r\sin(\theta - \theta_0) = a$ при $\theta = \theta_0$, то $r\sin(\theta - \theta_0) = a$ дает прямолинейную ассимптоту.

278. $r\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2a}{\sqrt{3}}\cdot$ **279.** $r\cos\theta = a,\ r\sin\theta = a.$

280. $r\sin(\theta - \alpha) + a\sin\alpha = 0.$ **281.** $r\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{a}{2} = 0.$

282. $r\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{6}\right) = \frac{a\sqrt{3}}{8}\cdot$ **283.** $r\sin\theta = 2a.$

284. $r\sin\left(\frac{\pi}{3} \pm \theta\right) = \frac{a}{8\sqrt{3}}\cdot$ **285.** $r\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a\sqrt{2}}{4}\cdot$

286—295. Так как общее уравнение линии 3-го порядка содержит 10 членов, то кривая 3-го порядка вполне определяется 9-ю условиями. Задание точки на кривой дает 1 условие; задание касательной (без точки касания), дает 1 условие (существование двукратного корня уравнения, определяющего координату точки пересечения кривой с прямою); задание касательной с точкой касания дает 2 условия. Задание ассимптоты дает 2 условия (обращение в 0 коэффициентов при 3-й и 2-й степени неизвестного в уравнении, определяющем координату точки пересечения кривой с ассимптотой). Задание двойной точки дает три условия ($f = 0$, $f_x' = 0$, $f_y' = 0$); задание двойной точки с пучком касательных дает 5 условий и т. д. Если $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ суть ассимптоты линии 3-го порядка, то ее уравнение имеет форму:

$$(*)\quad f_1 f_2 f_3 + ax + by + c = 0.$$

286. $x^2y + xy^2 - 2xy - x - y + 1 = 0.$

287. $2xy^2 - x^2y + 2x^2 - 2y^2 = 0.$

288. $-10x^3 + 13x^2y - 3xy^2 - 6y^2 = 0.$

289. $81(x-1)^3 + 190(x-1)^2(y-1) + 133(x-1)(y-1)^2 + 28(y-1)^3 + (y-x)^2 = 0.$

290. $(x-y+1)(x+y-2)(-5x+4y+3) - 8x - 4y + 4 = 0.$

291. $(x-y+1)(x+y-1)(x+2) + x - 4y + 2 = 0.$

292. $160x^3 + 374x^2y + 269xy^2 + 61y^3 + 2x^2 - 8y^2 = 0.$

293. $-4x^2y + 7xy^2 + 4y^3 + 4(x+y)^2 = 0.$

294. Теорема следует непосредственно из формулы (*).

295. Прямая, соединяющая две двойных точки кривой 3 порядка, имеет с нею, по крайней мере, 4 общих точки и следовательно сливается с нею всеми точками.

296. Вершины: y max $(a, -2a)$; x max $(-2a, a)$. Ассимптоты: $x=0, y=0, x+y=0$. Расположение бескон. ветвей: $x>0$ при $y=\pm\infty$; $y>0$ при $x=\pm\infty$; $x+y<0$ при $x=\pm\infty$.

297. Вершина: x max $\left(\frac{a}{3}\sqrt[3]{4}, \frac{2}{3}a\right)$. Перегиб $(0, a)$ с касательной $y=a$. Ассимптота: $x+y-\frac{a}{3}=0$, при чем левая часть противоположного знака с x при $x=\pm\infty$. В начале возврат 1-го рода с касательной $y=0$.

298. Вершины: y max $\left(-a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4}\right)$, x min $\left(-a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2}\right)$. Ассимптота: $-x+y+a=0$, при чем левая часть >0 при $x=\pm\infty$. В начале узел с касательными $x=0, y=0$.

299. Вершина: y min $(2a, -\sqrt[3]{4}a)$. Перегиб $(3a, 0)$ с касательной $x=3a$. Ассимптота: $y-x+a=0$, при чем левая часть знака противоположного с x при $x=\pm\infty$. В начале возврат 1-го рода с касательной $x=0$.

300. Вершины: x max $(-4a, 8a)$, y min $\left(-\frac{9}{2}a, \frac{27}{4}a\right)$. Перегиб: $\left(-\frac{9}{2}a, \frac{27}{2}a\right)$. Ассимптота $x+y-a=0$, при чем левая часть знака обратного с x при $x=\pm\infty$. Две параболич. ветви с ассимпт. направлением $x=0$. В начале—возврат 1-го рода с касат. $y=0$.

301. Ассимптота $x-2a=0$, при чем левая часть <0 при $y=\pm\infty$. В начале—возврат 1-го рода с касательной $y=0$.

302. Вершины: y min $\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\sqrt{3}\right)$, y max $\left(\frac{3}{2}a, -\frac{3}{2}a\sqrt{3}\right)$. Ассимптоты: $x-a=0$ (левая ч. >0 при $y=\pm\infty$), $-2x+2y-a=0$ (лев. часть—знака x), $2x+2y+a=0$ (левая ч. знака $-x$). Начало—возврат 1-го рода с касат. $y=0$.

303. Вершина: x min $(a, 0)$. Два перегиба $\left(\frac{4}{3}a, \pm\frac{4}{9}a\sqrt{3}\right)$. В начале—изолированная точка. Две параболические ветви с ассимпт. направлением $x=0$.

304. Вершины: y max $\left(\frac{2}{3}a, \frac{2}{9}a\sqrt{3}\right)$; y min $\left(\frac{2}{3}a, -\frac{2}{9}a\sqrt{3}\right)$; x max $(a, 0)$. В начале узел с пучком касательных $x^2-y^2=0$. Две параболич. ветви с ассимптот. направлением $x=0$.

305. Вершины: $x\max\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{8}\right)$, $y\max\left(\frac{2}{9}a, \frac{4}{27}a\right)$. В начале узел с касательными $y=0$, $y=x$. Две параболические ветви.

306. Вершина: $y\max\left(\frac{4}{9}a, \frac{4}{27}a\right)$. В начале возврат 1-го рода с касательною $y=x$. Две параболические ветви.

307. Вершина: $y\max\left(\frac{3}{4}a, \frac{3}{8}a\sqrt[3]{2}\right)$. В начале точка сплющенности при касательной $y=x$. Дге параболические ветви.

308. Вершины: $x\max\left(\frac{4}{27}a, -\frac{8}{81}a\right)$, y minimum$\left(\frac{9}{64}a, -\frac{27}{256}a\right)$. В начале—тройная точка с касательными $y^2=0, y+x=0$. Две параболические ветви.

309. Вершины: $y\max\left(\frac{\pm a\sqrt{2}}{4}, \frac{a}{4}\right)$, $x\min\left(-\frac{2}{9}a\sqrt{3}, \frac{2}{9}a\right)$, $x\max\left(\frac{2}{9}a\sqrt{3}, \frac{2}{9}a\right)$. В начале—тройная точка с касательными $y=0$, $y=\pm x$. Две параболические ветви.

310. Вершина: $y\max\left(\frac{4}{3}a, -\frac{4}{3}\sqrt[3]{4a}\right)$. Ассимптоты: $x-a=0$ (левая часть знака — y), $x+y+\frac{a}{3}=0$ (левая часть знака — x при $x=\pm\infty$). В начале—точка сплющенности.

311. В начале — точка сплющенности. Две параболические ветви с ассимпт. параболой $x^2=ay$.

312. Вершины: $y\max(\pm 2\sqrt{2}a, -4a)$; $x\max\left(-\frac{3}{2}\sqrt{3}a, -\frac{9}{2}a\right)$; $x\min\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}a, -\frac{9}{2}a\right)$. Перегибы $\left(\pm\frac{6}{5}\sqrt{6}a, -\frac{36}{5}a\right)$. Ассимптоты: $y-x+\frac{a}{2}=0$ (левая часть знака x), $y+x+\frac{a}{2}=0$ (левая часть знака—x при $x=\pm\infty$). Две параболические ветви. В начале—точка сплющенности.

313. Вершины $x\min\left(\frac{27}{4}a, -\frac{81}{8}a\right)$, $y\max\left(\frac{64}{9}a, -\frac{256}{27}a\right)$. Перегиб $(8a, -16a)$. Ассимптота $y+x+a=0$ (левая часть знака—x при $x=\pm\infty$). Две параболич. ветви. Начало—точка сплющенности.

314. Вершины: y max—min $(3a, \pm a\sqrt[4]{29})$, x max $(4a, 0)$. Начало и точка $(4a, 0)$—точки сплющенности.

315. Вершина: $x$max $(-4a, 0)$. Точка сплющенности $(0,0)$. Ассимптоты: $y-x-a=0$ (левая часть знака $-x$ при $x=\pm\infty$), $y+x+a=0$ (левая часть знака x при $x=\pm\infty$).

316. Вершины: y max $(\pm 2a, 2a)$, x max-min $(\pm a\sqrt[4]{27}, a\sqrt{3})$. В начале тройная точка с касательными: $x^2=0$, $y=0$.

317. Ассимптоты: $y-x+a=0$ (левая часть знака $-x$ при $x=\pm\infty$), $y+x+a=0$ (левая часть знака x). Пересечения кривой с ассимптотами: с первою $\left(\frac{a}{2}(2\pm\sqrt{2}), \pm\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)$ со второю $\left(\frac{a}{2}(-2\mp\sqrt{2}), \mp\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)$. Перегибы $(\pm 2a\sqrt[4]{27}, 2a\sqrt{3})$. В начале тройная точка с касательными $x^2=0$, $y=0$.

318. Вершины: y max-min $\left(\pm a\sqrt[8]{\frac{3}{16}}, \pm a\sqrt[8]{\frac{27}{16}}\right)$, x max-min $\left(\pm a\sqrt[8]{\frac{27}{16}}, \pm a\sqrt[8]{\frac{3}{16}}\right)$. В начале двойной перегиб.

319. Вершины: y max $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, +\frac{a}{2}\right)$, y min $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{2}\right)$, x max-min $(\pm a, 0)$. В начале двойной перегиб с касательными $x=\pm y$.

320. Ассимптоты: $x-a=0$ (левая часть <0 при $y=\pm\infty$), $x+a=0$ (левая часть >0 при $y=\pm\infty$). В начале двойной перегиб с касательными $x=\pm y$.

321. Вершины: x min $(0, \pm b)$, x max $\left(\frac{b^4}{a^3}, 0\right)$. Перегибы: $\left(\frac{4b^4}{9a^3}, \pm\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$. Две параболические ветви.

322. Вершина: x max $(2a, 0)$. Перегибы $\left(\frac{3}{2}a, \pm\frac{2}{3}a\sqrt{3}\right)$. Ассимптота $x=0$ ($x>0$ при $y=\pm\infty$).

323. Вершины: $y\,\mathrm{max\text{-}min}\left(-\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1), \pm\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$ $x\,\mathrm{min}\,(-a, 0)$. В начале узел с касат. $y=\pm x$. Ассимптота $x-a=0$; $(x<a$ при $y=\pm\infty)$.

324. В начале двойной перегиб с касательными $y=\pm x$. Ассимптоты $y=\pm a$ $(y^2<a^2$ при $x=\pm\infty)$.

325. Вершины: $y\,\mathrm{max\text{-}min}\left(\frac{3}{2}a, \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}a\right)$, $x\,\mathrm{max}\,(2a, 0)$, $x\,\mathrm{min}$ $\left(-\frac{1}{4}a, \pm\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$. Начало возврат 1-го рода (при $x<0$).

326. Вершины: $y\,\mathrm{max\text{-}min}\left(0, \pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. Узлы: $(\pm a, 0)$. Ассимптоты: $y=\pm\frac{x}{\sqrt{2}}\left(y^2<\frac{1}{2}x^2\right.$ при $\left.x=\pm\infty\right)$. Пересечения с ассимптотами (четыре) $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{3}}, \pm\frac{a}{\sqrt{6}}\right)$.

327. I случай: $a^2>2b^2$. Вершины: $y\,\mathrm{min}\,(0, b)$; $y\,\mathrm{max}(0, -b)$; $y\,\mathrm{max\text{-}min}\left(\pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a^2-2b^2}{a^2-b^2}}, \pm\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}\right)$; $x\,\mathrm{max}(a, 0)$; $x\,\mathrm{min}(-a, 0)$. Перегибы (4 точки) — на пересечении кривой с прямою $y=$ $=\pm\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2a^2-b^2}{a^2-2b^2}}\,x$.

II случай: $\frac{1}{2}b^2\leq a^2\leq 2b^2$. Вершины: $y\,\mathrm{max\text{-}min}\,(0, \pm b)$; $x\,\mathrm{max\text{-}min}$ $(\pm a, 0)$. Перегибов нет.

III случай: $a^2<\frac{1}{2}b^2$. Вершины: $y\,\mathrm{max\text{-}min}\,(0, \pm b)$; $x\,\mathrm{min\text{-}max}$ $(\pm a, 0)$; $x\,\mathrm{max\text{-}min}\left(\pm\frac{b^2}{2\sqrt{b^2-a^2}}, \pm\frac{b}{2}\sqrt{\frac{b^2-2a^2}{b^2-a^2}}\right)$. Перегибов — 4, как и в I случае.

В начале координат во всех 3 случаях изолированная точка.

328. Вершины: $y\,\mathrm{min\text{-}max}\,(0, \pm b)$, $y\,\mathrm{max\text{-}min}\left(\pm\frac{a}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}(b^2+\sqrt{a^4+b^4})}\right)$, $x\,\mathrm{min\text{-}max}\,(\pm a, 0)$,

x max-min $\left(\pm\frac{b}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+\sqrt{a^4+b^4})}\right)$. Перегибов — восемь точек. В начале—изолированная точка.

329. Вершина: x max $\left(\frac{1}{12}, 5\right)$. Перегиб $\left(\frac{2}{27}, 8\right)$. Ассимптоты: $x=0$ (x одного знака с y при $y=\pm\infty$), $y+1=0$ ($y+1 \gtrless 0$ при $x=-\infty$).

330. Вершины: y max $(0, a)$; y min $\left[b, -\sqrt{b\left(\frac{3}{4}a-b\right)}\right]$; x max $(a, 0)$; x min $\left[-\sqrt{b\left(\frac{3}{4}a-b\right)}, b\right]$, где

$$b=a\left[\frac{9}{16}+\frac{3}{32}\left(\sqrt[3]{2\sqrt{3}+2}-\sqrt[3]{2\sqrt{3}-2}\right)\right].$$

Начало — точка сплющенности с касательной $x+y=0$.

331. Вершины: $y$max $\left(0, \frac{1}{2}a\right)$; y min $\left(\pm a, -\frac{3}{2}a\right)$; $x$max-min $(\pm a\sqrt{2}, -a)$. Три узла: $(0, -a)$, $(\pm a, 0)$. Две параболич. ветви.

332. Вершины: y min $(1, 1)$; y max $\left(\frac{1+y_0^2}{2y_0}, y_0\right)$, где y_0 положит. корень уравнения $y^3+y^2+7y-1=0$ $\left(y_0 \text{ около } \frac{1}{7}\right)$; x min $\left(x_0, \frac{x_0^2-1}{2x_0}\right)$, x max $\left(x_1, \frac{x_1^2-1}{2x_1}\right)$, где x_0 и x_1 два отрицательные корня уравнения $x^4-6x^2+8x+1=0$ $\left(x_0 \text{ около} -\frac{1}{8}, x_1 \text{ около} -2\right)$. Ассимптоты: $x=0$ (x знака $-y$ при $y=\pm\infty$), $y=0$ (y знака x при $x=\pm\infty$), $y-x=0$ ($y-x$ знака $-x$ при $x=\pm\infty$). В точках $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ кривая пересекает ассимптоты (эти 3 точки лежат на прямой $x+y=2$—см. зад. 294).

333. Вершины: y min $\left(-\frac{13-\sqrt{7}}{18}, \frac{7\sqrt{7}-10}{18}\right)$, $y$max $\left(-\frac{13+\sqrt{7}}{18}, -\frac{7\sqrt{7}+10}{18}\right)$, $x$max $\left(-\frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$. В начале возврат 1-го рода ($x>0$). Ассимптоты $2x+1=0$ ($2x+1$ знака y при $y=\pm\infty$), $3y-3x+1=0$ (левая часть знака x при $x=\pm\infty$), $6x+12y-1=0$ (левая часть знака $-x$ при $x=\pm\infty$).

334. Вершина: $y\min(0, 0)$. Ассимптоты: $y-1=0$ ($y>1$ при $x=\pm\infty$), $y-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)=0$ (левая часть <0 при $x=\pm\infty$), $y+\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)=0$ (левая часть<0 при $x=\pm\infty$), $x=0$ ($x \gtrless 0$ при $y=\pm\infty$).

335. Вершины: $y\min\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}+1}{2}a\right)$, $y\max\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}a, \frac{\sqrt{2}-1}{2}a\right)$, $x\max\left(\frac{3}{2}a\left[\frac{2}{3}-\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}+\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}\right], \frac{1}{2}a\left[\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}+\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}-2\right]\right)$. Начало—узел с касательными $x=0$, $y=x$. Ассимптота $y+a=0$ (левая часть знака—x при $x=\pm\infty$).

336. Вершины $y\max(\pm 2a, 4a)$, x max-min $\left(\pm 2a\sqrt{2}, \frac{8}{3}a\right)$. В начале две ветви ($y>0$) касаются оси x.

337. Вершины: $y\max\left(0, \frac{1}{4}\right)$; x min-max $\left(\pm\frac{5\sqrt{15}+7\sqrt{7}}{8}, \frac{13+\sqrt{105}}{16}\right)$; x max-min $\left(\pm\frac{5\sqrt{15}-7\sqrt{7}}{8}, \frac{13-\sqrt{105}}{16}\right)$. Начало—узел с касат. $y=\pm x$. Ассимптоты: $y-1=0$ ($y>1$ при $x=\pm\infty$), $-4x+8y+3=0$ (левая часть знака—x при $x=\pm\infty$), $4x+8y+3=0$ (левая часть знака x при $x=\pm\infty$).

338. Абсциссы 2 вершин ($y\max$) определяются уравнением: $9x^4+8x^3-35x^2-32x-32=0$. В начале—две ветви, касающиеся оси x ($y>0$). Ассимптоты: $x-1=0$ ($x-1$ знака—y), $x+1=0$ ($x+1$ знака y), $-3x+3y+4=0$ (левая часть знака x при $x=\pm\infty$), $6x+3y+8=0$ (левая часть знака—x при $x=\pm\infty$).

339—350. При построении кривых в полярных координатах отрицательные значения радиуса-вектора r откладываются на отрицательном направлении лучей (т. е. на полупрямой $\theta=\theta_0+\pi$ вместо полупрямой $\theta=\theta_0$).

339. При $\theta=0$, π получается minimum $r=a$. При $\cos\theta=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ —четыре точки перегиба. Четыре параболические ветви.

340. В полюсе узел с касательными $\theta = -\frac{\pi}{8}$, $\theta = \frac{3\pi}{8}$; при $\theta = \frac{\pi}{8}$ $\left(\text{и при } \theta = \frac{5\pi}{8} \text{ для отрицат. } r\right)$ наибольшее $r = a\sqrt{2}$.

341. Ассиматоты: $r\cos\theta = \pm a$. При $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ касательная перпендикулярна к полярной оси. В точках, где $\operatorname{tg}^3\theta + 2\operatorname{tg}\theta - 1 = 0$, касательные параллельны пол. оси. В точках, где $2\operatorname{tg}^3\theta + 3\operatorname{tg}^2\theta + 3 = 0$ имеются перегибы (два).

342. В точке $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$ узел. Ассимптота: $r\sin\theta = 2a$. При $\theta = 0$ касат. совпадает с пол. осью. При $\cos\theta = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ касательная перпендикул. к полярной оси.

343. В точке, где $\theta = 0$, π и $r = a$, имеется узел. При $\theta = \frac{\pi}{2}$ — ассимптота $r\cos\theta = 2a$. При $\theta = \frac{3\pi}{2}$ касат. перпенд. к полярной оси. При $\sin\theta = -\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ касательная параллельна полярной оси.

344. Замкнутая прямая в форме креста. При $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ наибольшее $r = a$; при $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ наименьшее $r = \frac{a}{2}$. Восемь перегибов определяются условием $\cos 4\theta = \frac{27 - \sqrt{1344}}{15}$.

345. В полюсе тройная точка с касательными $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Кривая имеет два завитка, две бесконечные ветви, которые приближаются к ассимптоте $r\cos\theta = 0$. Точки перегиба определяются уравнением: $8\cos^3 2\theta + 3\cos^2 2\theta + 6\cos 2\theta + 10 = 0$, которое имеет один пригодный корень.

346. Строфоида. В полюсе узел с двумя взаимно перпенд. касательными: $\theta = \frac{\alpha}{2}, \frac{\pi + \alpha}{2}$. Ассимптота $r\sin(\alpha - \theta) = a\sin\alpha$ пересекает кривую в точке $\left(a\operatorname{tg}\alpha, \frac{3\pi}{2}\right)$.

347. Конхоида круга. 1 случай: $a > b$ (Улитка Паскаля). В полюсе узел. Четыре точки с касательными параллельными полярной оси: при $4\cos\theta = -\frac{b}{a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{a^2}+8}$. Четыре точки с касательными перпендикулярными к полярной оси: при $\theta = 0$, π и $\cos\theta = -\frac{b}{2a}$. Перегибов нет.

II случай: $a = b$ (Кардиоида). В полюсе точка возврата 1 рода. Две точки с касательными параллельными полярной оси: $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. Три точки с касательными перпендикулярными к полярной оси: $\theta = 0$, $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$. Перегибов нет.

III случай: $a < b < 2a$. Две точки с касательными парал. полярной оси: при $4\cos\theta = -\frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2}+8}$. Четыре точки с касательными перпендикулярными к пол. оси: $\theta = 0$, π, $\cos\theta = -\frac{b}{2a}$. Две точки перегиба: $\cos\theta = -\frac{b^2+2a^2}{3ab}$.

IV случай: $b \geqq 2a$. Две точки с касательными параллельными полярной оси, как и в III сл. Две точки с касат. перпендик. к полярной оси: $\theta = 0$, π. Перегибов нет.

348. Конхоида прямой (Никомеда). I случай: $a < b$. В полюсе узел. Две точки с касательными параллельными полярной оси: $\cos\theta = -\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$. Две точки с касательными перпендикулярными к пол. оси: $\theta = 0$, π. Две точки перегиба при $2\sec^3\theta - 3\sec\theta - \frac{b}{a} = 0$ (на правой ветви). Ассимптота: $r\cos\theta = a$ делит кривую на две отдельные ветви.

II случай: $a = b$. В полюсе точка возврата. Нет точек с касательными параллельными пол. оси. Касательная перпенд. к полярной оси при $\theta = 0$. Перегиба два на правой (от ассимптоты) ветви.

III случай: $a > b$. При $\theta = 0$, π касат. перпендик. к полярной оси. Перегибов четыре—два на правой и два на левой ветви.

349. Трехлепестный венчик. В полюсе 3 касательные: $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. Наибольшие значения $r = a$ при $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$.

350. Три ассимптоты: $r\cos\theta + \frac{a}{3} = 0$, $r\sin\left(\frac{\pi}{6} \pm \theta\right) = \frac{a}{12}$. Вершины (с касательными параллельными пол. оси) при $\theta = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$. В полюсе возврат 1 рода.

351. $y - \frac{a}{4} = \frac{3}{a}\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$, касание 2-го порядка.

352. $x^2 + y^2 - 6(x + y) + 10 = 0$, касание 3-го порядка.

353. $\left(y - \frac{8}{5}a\right)^2 = \frac{2}{5}a\left(\frac{7}{5}a - x\right)$, $\left(x - \frac{a}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}a\left(\frac{11}{5}a - y\right)$.

354. 3-го порядка. **355**. 7-го порядка.

356. Уравнение искомого геометрического места имеет вид: $(x - x_0)(y - y_0)y_0'' = (x - x_0)y_0'^2 - (y - y_0)y_0'$, где (x_0, y_0) данная точка, y_0' и y_0'' — значения y' и y'' из уравнения данной кривой в точке (x_0, y_0).

357. $\sqrt{3}(z_1 - z_0)$, где z_0 и z_1 координаты начала и конца дуги.

358. Длина дуги от начала координат:

$$\frac{1}{2\sqrt{5}}\left[\sqrt{5z(1+5z)} + \log(\sqrt{5z} + \sqrt{1+5z})\right].$$

359. $\frac{1}{2}\left[\sqrt{2z(1+2z)} + \log(\sqrt{2z} + \sqrt{1+2z})\right]_{z_0}^{z_1}$.

360. Длина дуги от (0,0,0): $\frac{1}{2}z\sqrt{2+z^2} + \log\frac{z + \sqrt{2+z^2}}{\sqrt{2}}$.

361. $\sqrt{2}(y_1 - y_0)$, где y_0 и y_1 координаты начала и конца дуги.

362. Длина дуги от $(0,0,0): x + z$.

363. Длина дуги от $(0,1,0): \log\frac{1-x}{y}$.

364. Длина дуги от $(1,0,1): \sqrt{z^2 - 1}$.

365. Длина дуги между точками $t = 0$, $t = 1$: $\frac{1}{21}\left\{27\sqrt{3} - 2\sqrt{6}\right\}$.

366. Длина дуги от $(0,0,0): x + z$.

367—377. В ответах введены следующие обозначения: T—касательная, B—бинормаль, N—главная нормаль, R_1 и R_2—радиусы первой и второй кривизны, при чем три числа, написанные после T, дают косинусы углов T с осями x, y, z, и т. п.

367. $T: \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0$; $B: \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}$; $N: \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$;

$R_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $R_2 = \infty$.

368. $T: \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}$; $B: \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $N: \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}$;

$R_1 = \frac{3}{2}\sqrt{6}$, $R_2 = \frac{1}{3}$.

369. $T: \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0$; $B: 0, 0, 1$; $N: -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0$;

$R_1 = 2\sqrt{2}$, $R_2 = \frac{1}{6}$.

370. Те же числа, как в 369.

371. $T: \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}$; $B: \frac{4}{\sqrt{41}}, \frac{-3}{\sqrt{41}}, \frac{4}{\sqrt{41}}$; $N: \frac{3}{\sqrt{82}}, \frac{8}{\sqrt{82}}$,

$\frac{3}{\sqrt{82}}$; $R_1 = 2\sqrt{\frac{2}{41}}$, $R_2 = \frac{41}{18}$.

372. $T: \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$; $B: \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}$; $N: \frac{-5}{\sqrt{42}}, \frac{-4}{\sqrt{42}}$,

$\frac{-1}{\sqrt{42}}$; $R_1 = 3\sqrt{\frac{3}{14}}$, $R_2 = \frac{7}{3}$.

373. $T: \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$; $B: \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}$; $N: \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0$;

$R_1 = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $R_2 = 3$.

374. $T: \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$; $B: \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}$; $N: 0, 1, 0$; $R_1 = 1$,

$R_2 = \frac{4}{3}$.

375. $T: \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}$; $B: 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}$; $N: \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}$; $R_1 = 6\sqrt{\frac{3}{10}}$; $R_2 = \frac{5}{2}$.

376. $T: 1,0,0$; $B: 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$; $N: 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$; $R_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $R_2 = \infty$.

377. $\cos(T,Z) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos(B,Z) = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos(N,Z) = 0$,

378. $z = k \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ (косой геликоид).

379. $x\cos t + y\sin t = a, t = \frac{z}{k} \pm \frac{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{a}$ (развертывающийся геликоид).

380. $x\cos\left(\frac{\pi}{4} + \log z\right) + y\sin\left(\frac{\pi}{4} + \log z\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} z$.

381. $x\cos t + y\sin t = z, t = \log(z \pm \sqrt{x^2+y^2-z^2})$.

382. $x\cos t + y\sin t = z, 2t = z \pm \sqrt{z^2 \pm 4\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$.

383. Из сравнения данной прямой с касательной: $\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}$ следует: $\frac{x'}{z'} = \varphi, x - z\varphi = \varphi_1, \frac{y'}{z'} = \psi, y - z\psi = \psi_1$. Дифференцирование второго и четвертого из этих равенств дает $z = -\frac{\varphi_1'}{\varphi'} = -\frac{\psi_1'}{\psi'}$, после чего получается $x = \varphi_1 + z\varphi, y = \psi_1 + z\psi$.

384. $x = \cos t, y = \sin t, z = t$.

385. $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t$.

386. $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t^2$.

387. Т. к. $\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d^3y}{dt^3} = \frac{d^3z}{dt^3} = 0$, то $R_2 = \infty$ во всех точках.

388. При $bc_1 = cb_1$ кривая лежит в плоскости $cy - bz = cb_2 - bc_2$.

389. Во всех точках кривой плоскость кривизны $3x + y - 2z = 0$.

390. $R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} z^2$, $R_2 = \frac{z^2}{\sqrt{z^2-1}}$

391. $R_1 = R_2 = 1 + z^2 + \frac{1}{4} z^4$. **392.** $R_1 = R_2 = 2ch^2 z$.

393. Искомая линия определяется системой: $f = 0$, $lf_x' + mf_y' + nf_z' = 0$.

394. Линия: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^4} tg^2\alpha - \frac{y^2}{b^4} - \frac{z^2}{c^4} = 0$.

395. Линия: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{k^2}$, $c < k < a$.

396. Плоскости $lx + my + nz = \pm\sqrt{a^2l^2 + b^2m^2 + c^2n^2}$.

397. $4X + 3Y + 12Z = 18$, $2X + 6Y + 12Z = 18$.

398. $\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right) > \left(\frac{lx_0}{a^2} + \frac{my_0}{b^2} + \frac{nz_0}{c^2}\right)^2$.

401. Касат. плоскость: $X[\cos 2\theta \cos\psi f(\psi) - \sin\psi f'(\psi)] + Y[\cos 2\theta \sin\psi f(\psi) + \cos\psi f'(\psi)] - Z \cdot \sin 2\theta \cdot f(\psi) + a\sin^2\theta f^2(\psi) = 0$. (Поверхность может быть задана тремя уравнениями $x = a\sin^2\theta\cos\psi f(\psi)$, $y = a\sin^2\theta \sin\psi f(\psi)$, $z = a\sin\theta\cos\theta f(\psi)$).

402—404. Уравнение подэрной поверхности относ. начала для данной пов-сти $f(x, y, z) = 0$ получается исключением x, y, z из четырех уравнений: $(X - x) f_x' + (Y - y) f_y' + (Z - z) f_z' = 0$, $\frac{X}{f_x'} = \frac{Y}{f_y'} = \frac{Z}{f_z'}$, $f(x, y, z) = 0$.

402. $(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = a^2X^2 + b^2Y^2 + c^2Z^2$.

403. $cXY + Z(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0$.

404. $2Z(X^2 + Y^2 + Z^2) + pX^2 + qY^2 = 0$.

405. $D^2 = (Aa)^2 + (Bb)^2 + (Cc)^2$.

406. $(Aa + Bb + Cc + D)^2 = R^2(A^2 + B^2 + C^2)$. Точка касания: $x = \frac{A(a^2 - R^2) + Bab + Cac + aD}{Aa + Bb + Cc + D}$ и проч.

407. $R^2 + R_1^2 = (a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2$.

408. $R \pm R_1 = \pm\sqrt{(a - a_1)^2 + (b - b_1)^2 + (c - c_1)^2}$.

409. $y - x = \pm(z - 2)\sqrt{6}$. (Через данную точку проводим плоскость, удаленную от центров сфер на расстояния, равные их радиусам).

410—412. Решив уравнение $f(x, y, z, a) = 0$ относительно a, получаем: $a = F(x, y, z)$ и, продифференцировав его, находим F'_x, F'_y, F'_z, не содержащие параметра a. Исключая затем функцию φ из уравнения $z = \varphi(x, y)$ (для чего составляются $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$ и из двух уравнений исключается φ' — производная по аргументу $\frac{y}{x}$), получаем в результате уравнение $pF'_x + qF'_y - F'_z = 0$, выражающее условие ортогональности.

413. Легко убедиться, составляя p и q, что $2p + 3q - 1 = 0$.

414. Легко проверить, составляя p и q, что $(b - x)p - qy = b - z$.

415. $(AC - E^2)x^2 + 2(CD - EF)xy + (BC - F^2)y^2 = CQ$.

416. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}\right) = \left(\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2}\right)^2$.

417. $(z - c)^4 = \left[\left(\frac{c}{a}\right)^{4/3} - 1\right]^3 (x^4 + y^4)$.

418. $[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2](a^2 + b^2 + c^2 - R^2) = [a(x-a) + b(y-b) + c(z-c)]^2$.

419.
$$\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1\right)\left[\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} + \frac{(z-z_0)^2}{c^2}\right] = \left[\frac{(x-x_0)x_0}{a^2} + \frac{(y-y_0)y_0}{b^2} + \frac{(z-z_0)z_0}{c^2}\right]^2.$$

420. Два конуса: $13x^2 + 13y^2 - 19z^2 - 8xy - 24xz - 24yz + 36x + 36y + 108z - 132 = 0$, $37x^2 + 37y^2 + 5z^2 - 8xy - 24xz - 24yz + 12x + 12y + 36z - 132 = 0$. (Из геометрических соображений определяем вершины 2 конусов $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 2\right)$, $(2, 2, 6)$ и далее поступаем, как в 418).

421. Приняв во внимание уравнение нормали:
$$\frac{X - x}{2x - lf'} = \frac{Y - y}{2y - mf'} = \frac{Z - z}{2z - nf'}$$
и условие совмещения двух прямых
$$\frac{X - x_0}{l} = \frac{Y - y_0}{m} = \frac{Z - z_0}{n}, \quad \frac{X - x_1}{l_1} = \frac{Y - y_1}{m_1} = \frac{Z - z_1}{n_1}$$
в одной плоскости:
$$\begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0,$$
легко докажем требуемый результат.

422. $(x^2+y^2+z^2)\ (aa_1+bb_1+cc_1)^2=(ax+by+cz)^2\ (a_1{}^2+$
$+b_1{}^2+c_1{}^2)$.

423. $(x^2+y^2+z^2)^2-2R\,(x^2+y^2+z^2)\ (x+y+z+R)+$
$+2R^2\,(x+y+z)^2=0$.

424. $x^4+y^4+z^4-4xyz\ (x+y+z)=a^2\ (xy+xz+yz)$.

425. Пересечение поверхности с переменною плоскостью $x+y=\alpha$, перпендикулярною к оси вращения, дает окружность: $x^2+y^2+z^2=\alpha^2-\frac{1}{2}(\alpha-a)^2,\ x+y=\alpha$.

426. В пересечении с плоскостью $x+y=\alpha$ получается окружность: $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2\ (3a+\alpha)}{3\ (a+\alpha)},\ x+y=\alpha$.

427. $x^2+y^2=R^2$. **428**. $x^2+z^2=y^2\ \mathrm{tg}^2\ \alpha$.

429. $x^2+y^2+z^2=R^2+\frac{1}{3}\ (x+y+z)^2$ (Прибегая к способу неопределенных множителей, взять производные по a, b, c от функции $ax+by+cz+1-\lambda\ (a+b+c)-\mu\left(a^2+b^2+c^2-\frac{1}{R^2}\right)=0$).

430. $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$. **431**. $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$.

432. $(bcx+acy+abz+abl)^2=4a^2b^2lz$. **433**. $y^2=4xz$.

434. $x\cos t+y\sin t=a,\ \ t=\frac{1}{a}\left[z\pm\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right]$.

435. $x\cos t+y\sin t=z,\ \ t=\log\left(z\pm\sqrt{x^2+y^2-z^2}\right)$.

436. $x\cos t+y\sin t=z,\ \ 2t=z\pm\sqrt{z^2\pm4\sqrt{x^2+y^2-z^2}}$.

437. См. зад. 383.

438. $x=R\ \sin u\cos v+\frac{1}{2}p\,\mathrm{tg}^2 v,\ \ y=R\ \sin u\sin v-p\,\mathrm{tg}\,v,\ \ z=$
$=R\ \cos u$.

439. $x=R\sin u\cos v+\frac{a^2\cos v}{\sqrt{a^2\cos^2 v+b^2\sin^2 v}},\ \ y=R\sin u\sin v+$
$+\frac{b^2\sin v}{\sqrt{a^2\cos^2 v+b^2\sin^2 v}},\ \ z=R\cos u$.

440. $x = R\sin u\cos v + a\sqrt{\cot v}$, $y = R\sin u\sin v + a\sqrt{\operatorname{tg} v}$, $z = R\cos u$.

441. $|x|+|y|+|z| = l$ (восемь плоскостей, образующих правильный октаэдр).

442. $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3} = l^{2/3}$.

443. $\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}+\sqrt{|z|} = \sqrt{l}$.

444. $|x|+|y| = \frac{1}{2}z$ (система четырех плоскостей).

445. $x^4+y^4 = \frac{1}{16}z^4$.

446. $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} = \sqrt{a}$ (как огибающая плоскостей $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1$ при условии $\alpha + \beta + \gamma = a$).

447. $x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3} = a^{2/3}$ (см. 446).

448. $xyz = \frac{2}{9}a^3$ (см. 446).

449. 2 точки $\left(0, \pm\frac{1}{6}\sqrt{2}, \frac{1}{12}\right)$ с радиусом кривизны $\sqrt{6}$.

450. 4 точки: (a, a, a), $(a, -a, -a)$, $(-a, a, -a)$, $(-a, -a, a)$ с радиусом кривизны $a\sqrt{3}$.

451. $\left(\frac{a}{9}, \frac{a}{9}, \frac{a}{9}\right)$. **452.** $R_1 = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $R_2 = \frac{3}{2}\sqrt{6}$.

453. $R_1 = -R_2 = \frac{x^2+y^2+a^2}{a}$.

454. $R_1 = -R_2 = \frac{x^2+y^2}{a}$ (Катеноид).

455. $R_1 = \infty$, $R_2 = -(x+y)\frac{2xy(x+y)}{x^2+y^2}$.

456. $\left[xy \pm \sqrt{(x^2+c^2)(y^2+c^2)}\right]\cdot\frac{1}{c^2}\sqrt{x^2+y^2+c^2}$.

ОТДЕЛ IV.

Геометрические приложения интегрального исчисления.

При решении задач этого отдела полезно иметь в виду следующие определенные интегралы, знание которых значительно сокращает вычисления:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots\ 2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6 \cdots\ 2n}{3\cdot 5\cdot 7 \cdots\ 2n+1}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^k dx}{1+x^m} = \frac{1}{m}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{k+1}{m}\pi} \text{ при } 0<\frac{k+1}{m}<1.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^k dx}{(1+x^m)^n} = \frac{1}{m}\,\frac{(1-\lambda)(2-\lambda)\cdots(n-1-\lambda)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\cdot\frac{\pi}{\sin\lambda\pi},$$

$\lambda = \dfrac{k+1}{m}$, при чем $0<\lambda<1$, n целое.

1. $p(3\sqrt{3}-1)$. **2.** $\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2} + \dfrac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\log\dfrac{b(\sqrt{a^2+b^2}+b)}{a(\sqrt{a^2+b^2}-a)}$ (положить $x=a\cos^4 t$, $y=b\sin^4 t$). **3.** $12a\sqrt{3}$. **4.** $18a\sqrt{3}$. **5.** $32a\sqrt{2}$. **6.** $10a$. **7.** $a-y+\dfrac{2y^3}{27a^2}$. **8.** $48a$. **9.** $\dfrac{200\sqrt{15}}{9}a$. **10.** $6a\sqrt{3}$.

11. $2a\log\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}+a\cos t$. **12.** $\left[\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{17}}{2}+\log(1+\sqrt{2})+\right.$ $\left.+\dfrac{1}{8}\log(4+\sqrt{17})\right]a$. **13.** $\dfrac{4(a^2+ab+b^2)}{a+b}$ (положить $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$). **14.** $5a\left[1+\dfrac{\sqrt{3}}{6}\log(2+\sqrt{3})\right]$. (Положить $x=a\cos^5 t$, $y=a\sin^5 t$). **15.** $6a$. **16.** $8R\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. **17.** $8R\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$. **18.** $a\log\dfrac{a}{y}$.

19. $\frac{45}{4}\pi a$. **20.** $\frac{16}{3}a$. **21.** $3\pi a$. **22.** $\frac{a}{3}\left[\frac{x^2+y^2}{a^2}-4\right]^{3/4}$.

23. $y\sqrt{1-\left(\frac{2a}{y}\right)^{2/3}}\left[1+2\left(\frac{2a}{y}\right)^{2/3}\right]$. **24.** $2a-\sqrt{2(x^2+y^2)}$.

25. $2a\left[2-\frac{\sqrt{4x^2+y^2}}{x}+\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{4x^2+y^2}+x\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})\sqrt{x^2+y^2}}\right]$. **26.** (Положить $x+y=a\operatorname{ch}^3t$, $x-y=a\operatorname{sh}^3t$) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\left[(x_2+y_2)^{2/3}+(x_2-y_2)^{2/3}\right]^{3/2}-\left[(x_1+y_1)^{2/3}+(x_1-y_1)^{2/3}\right]^{3/2}\right\}$. **27.** $f(t_1)+f''(t_1)-f(t_0)-f''(t_0)$.

28. $\frac{8}{3}a$. **29.** $\frac{3}{2}a\pi$. **30.** $\frac{16}{3}a$. **31.** $\frac{a}{2}\operatorname{tg}^2u$. **32.** $2a(1-\cos u)$.

33. $a(u+\log\cos u)$. **34.** $\frac{2}{3}a(\sec^3u-1)$. **35.** $a\left[2\sin u-\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right]$.

36. $\frac{a}{2}\left[\frac{\sin u}{\cos^2u}+\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}\right)\right]$. **37.** $a\log\frac{1+\cos u}{2\cos u}-\frac{a}{2}\cdot\frac{1-\cos u}{1+\cos u}$.

38. $x+y$. **39.** $x+y$. **40.** $x+y-1$. **41.** $\sqrt{2}z$. **42.** $\sqrt{2}(z-1)$.

43. $\pi a\sqrt{2}$ (t от $-\infty$ до $+\infty$). **44.** $x_c=y_c=\frac{2R}{\pi}$. **45.** $\left(\pi a,\frac{4}{3}a\right)$.

46. $\left(\frac{2}{5}a,\frac{2}{5}a\right)$. **47.** $\left(\frac{4}{5}a,0\right)$. **48.** $\left(\frac{a}{2\pi},\frac{a}{2\pi},\frac{k\pi}{4}\right)$. **49.** 2. **50.** $\frac{16}{15}$.

51. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$. **52.** $\frac{64}{9}$. **53.** $\frac{\pi}{8}$. **54.** $\frac{1}{10}a^2$. **55.** $\frac{8}{15}a^2$. **56.** $\frac{9}{28}a^2$.

57. $\frac{44}{15}\sqrt{2}p^2$. **58.** $\frac{13}{16}\sqrt{2}\pi a^2$. **59.** $a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{4}{3}\right)$. **60.** $2ab\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)$ (положить $x=a\cos t$). **61.** $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$. **62** $\frac{2}{3}\sqrt{ab}(a+b)$.

63. $a^2\left[\pi-\frac{1}{\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3})\right]$. **64.** $\frac{2}{3}a^2$. **65.** $a^2\left(\frac{1}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$. **66.** $4a^2$.

67. πa^2. **68.** $\frac{4}{3}\cdot\frac{a^3}{b}$. **69.** $\frac{4}{5}a^2$. **70.** $\frac{a^2}{2}(\pi-2)$. **71.** $\frac{ab}{30}$.

72. $a^2\left[3\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})-2\right]$. **73.** $\pi a^2\left(4-\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$. **74.** $\frac{1}{2}\pi a^2$.

75. $4\pi a^2$ (положить $x = 2a\sin^2 t$). **76.** $2a^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$, $2a^2\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$ (положить $x = a\cos t$). **77—82.** Удобно вычислять площадь по формуле $\frac{1}{2}\int xdy-ydx$. **77.** $\frac{(n+1)(n+2)}{n^2}\pi R^2$. **78.** $\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\pi R^2$.

79. $\frac{1}{6}ab$ (положить $x = a\cos^4 t$, $y = b\sin^4 t$). **80.** $ab\cdot\frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}$.

81. $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n+1)}{2^{4n}\cdot(1\cdot 2\cdots n)^2}\pi ab$. **82.** $2\pi ab\cdot\frac{1\cdot 3\cdots k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdots l}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(k+l)}$ (подстановка $x = a\cos^k t$, $y = b\sin^l t$). **83—104.** Эти задачи удобно решать в полярной системе координат, вводя $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

83. $\frac{1}{4}\left[a^2\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}+b^2\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}-ab\right]$. **84.** $3\pi\sqrt{2}a^2$. **85.** a^2. **86.** $\frac{\pi}{2}a^2$.

87. $\pi\sqrt{2}a^2$. **88.** $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$. **89.** $\frac{1}{2}\pi a^2$. **90.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}a^2$.

91. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}(a^2+b^2)$. **92.** $3\pi a^2$. **93.** $\frac{2}{3}\pi(a^2+b^2)$. **94.** $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{2n}}(a^2+b^2)$.

95. $\frac{\pi a^2}{n}$ при n нечетн., $\frac{\pi a^2}{2n}$ при n четном. **96.** $\frac{5}{16}\pi a^2$. **97.** $\frac{a^2}{210}$.

98. $\frac{a^2}{60}$ **99.** $\frac{4a^2}{105}$. **100.** $\frac{3}{2}a^2$. **101.** $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}a^2$. **102.** $\frac{a^2}{8}(6-\pi-4\log 2)$.

103. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}a^2$. **104.** Внутри круга $a^2\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$. **105.** a^2.

106. $a^2\left(\frac{\pi}{4}+1\right)$. **107.** $\frac{1}{2}\pi a^2$. **108.** $\frac{a^2}{4}(3-2\lg 2)$ **109.** $a\sqrt{b^2-a^2}+b^2\arccos\frac{a}{b}-2ab\log\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}$. **110.** $\frac{1}{2}(a^2+2b^2)\arccos\frac{b}{a}-\frac{3}{2}b\sqrt{a^2-b^2}$, $(a^2+2b^2)\arcsin\frac{b}{a}+3b\sqrt{a^2-b^2}$. **111.** $\frac{\pi}{2}(a^2+2b^2)$.

112. $\left(2-\frac{\pi}{2}\right)a^2$, $\left(2+\frac{\pi}{2}\right)a^2$. **113.** $3\pi a^2$. **114.** $\left(2-\frac{\pi}{2}\right)a^2$, $\left(2+\frac{\pi}{2}\right)a^2$. **115.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **116.** $\frac{1}{16}\pi^2a^3$. **117.** $\frac{32}{105}\pi a^3$, $\frac{12}{5}\pi a^2$.

118. $\frac{2}{3}\pi a^3$, $4\pi a^2$. **119.** $4\pi^2a^3$. **120.** $\frac{8}{15}\pi a^3$, $\frac{1}{2}\pi a^2\left[2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5})\right]$. **121.** $\frac{3}{4}\pi a^3$, $3\pi a^2$, $\frac{72}{35}\sqrt{3}\pi a^3$, $\frac{28}{5}\sqrt{3}\pi a^2$.

122. $\frac{10}{3}\pi a^2$, $\frac{1240}{63}\sqrt{\frac{5}{3}}\pi a^2$. **123.** $6\pi a^2$, $\frac{816}{35}\sqrt{2}\pi a^2$.

124. $\frac{\pi a^3}{12}\left[3\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})-2\right]$, $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8}a^3$, $2(2-\sqrt{2})\pi a^2$.

125. $\frac{8}{3}\pi a^3$, $\frac{32}{5}\pi a^2$. **126.** $\frac{\pi a}{6}(2a^2+3b^2)+\frac{\pi b^4}{2\sqrt{a^2-b^2}}\log\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$,

$2\pi\left[a^2+\frac{b^4}{\sqrt{a^4-b^4}}\log\frac{a^2+\sqrt{a^4-b^4}}{b^2}\right]$, $\frac{\pi b}{6}(2b^2+3a^2)+$

$+\frac{\pi a^4}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{b}{a}$, $2\pi\left[b^2+\frac{a^4}{\sqrt{a^4-b^4}}\arccos\frac{b^2}{a^2}\right]$.

127. $\frac{256}{315}\cdot\frac{\pi b^9}{a^6}$. **128.** $6\pi^3a^3$, $16\pi^2a^2$. **129.** $\frac{\pi}{2}\left(3\pi^2-\frac{16}{3}\right)a^3$, $4\pi\left(2\pi-\frac{8}{3}\right)a^2$.

130. π^2a^3, $\frac{32}{3}\pi a^2$. **131.** $2\pi^2a^3$. **132.** $\frac{1}{4}\pi p^3$, $\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\pi p^2$, $\frac{2}{5}\pi p^3$, $\frac{1}{4}\left[3\sqrt{2}-\log(1+\sqrt{2})\right]\pi p^2$. **133.** $\frac{16}{3}ab^2$. **134.** $\frac{2}{5}a^2\sqrt{2pa}$.

135. $\frac{1}{20}\cdot\frac{a^5}{pq}$. **136.** $\pi a^2\sqrt{pq}$. **137.** $\frac{128}{15}R^2\sqrt{pR}$.

138. $\alpha\left(\frac{5}{6}-\frac{\pi}{4}\right)a^3$ (сечения можно брать перпендик. OZ или OX).

139. $a^3\left(2\sin\alpha-\frac{1}{3}\sin^3\alpha-\frac{1}{2}\sin 2\alpha-\alpha\right)$. **140.** $\frac{\pi R^4}{2a}$. **141.** $\pi(\alpha_1-\alpha_2)a^3$.

142. $\left(2\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right)\pi a^3$. **143.** $\frac{5}{12}\pi a^3$. **144.** Нижняя часть $\frac{4}{3}\pi(c-a)^3$, верхняя часть $\frac{4}{3}\pi a(3c^2-3ca+a^2)$. **145.** Нижний об'ем: $\frac{5}{54}\pi a^3$, верхний об'ем: $\frac{16}{27}\pi a^3$. **146.** Нижняя часть и средняя (кольцеобразная) равны каждая $\frac{8}{75}\pi R^3$, верхняя часть $=\frac{92}{75}\pi R^3$.

147. $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})\pi abc$. **148.** $\left(2\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right)\pi acb$. **149.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **150.** Меньшая часть $\frac{5}{24}\pi abc$. **151.** $\frac{4}{35}\pi abc$ (в сечении $z=z_0$ получаются кривые вида $\left(\frac{x}{a_1}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b_1}\right)^{2/3}=1$, площади которых равны $\frac{3}{8}\pi a_1b_1$ по рез. 81).

152. $\frac{1}{90}abc$ (в сечении $z = z_0$ получаются кривые $\sqrt{\frac{x}{a_1}} + \sqrt{\frac{y}{b_1}} = 1$, площади которых равны $\frac{1}{6}a_1 b_1$ по рез. 80).

154—177. Эти задачи решаются проще всего помощью прямоугольной системы координат.

154. $\frac{1}{4}abc$. **155.** $\frac{a^2b^2}{4c}$. **156.** $\frac{4}{9}(ab)^{3/2}$. **157.** πR^3. **158.** $\left(\frac{\pi a}{4} - \frac{2}{3}R\right) R^2$.
159. $\frac{a^3}{18}$ (первое интегрирование по x). **160.** $\frac{29}{675}a^3$ (сперва интегрировать по x). **161.** $\frac{1}{2}\pi ac^2$ (проектировать на плоск. YOZ). **162.** $\frac{1}{3}abc$.
163. $\frac{a}{6}(a-c)^2(2a+c)$. **164.** $\frac{7\pi}{32}ac^2$ (сперва интегрир. по x). **165.** $\frac{88}{45}abc$ (ввести $x = a\cos t$). **166.** $\frac{16a^3}{3\sin\alpha}$ (сперва интегрир. по x). **167.** $\frac{4}{\pi^2}abc$.
168. $\frac{1}{4}abc$. **169.** abc. **170.** $4abc$. **171.** $\pi^2 abc$. **172.** $\frac{\pi^2 c^5}{ab}$. **173.** $\frac{\pi^2 c^3}{4}$.
174. $\frac{c^{k+l+1}}{(k-1)(l-1)a^{k-1}b^{l-1}}$. **175.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{27}$ (решение задачи требует введения функций Γ). **176.** $\frac{\pi}{16}$ (см. 175). **177.** $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (см. 175).

178. $\int\limits_0^{\frac{a}{2}\sqrt{3}} \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} f(x,y)\,dx\,dy + \int\limits_{\frac{a}{2}\sqrt{3}}^{a} \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x,y)\,dx\,dy.$

179. $\int\limits_0^{a} \int\limits_0^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int\limits_a^{2a} \int\limits_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$

180. $\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \int\limits_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} \int\limits_0^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy.$

181. $\int\limits_0^a \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int\limits_0^a \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy +$

$$+\int\limits_a^{2a\sqrt{2}} \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy.$$

182. $\frac{1}{6}Mh^2$. **183.** $\frac{1}{5}Mh^2$. **184.** $\frac{8}{35}Mh^2$. **185.** $\frac{35}{36}Ma^2$.

186. $\frac{3}{5}x, \frac{3}{8}y$. **187.** $x_c = y_c = \frac{256}{315}\frac{a}{\pi}$. **188.** $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{8}{9\pi}\right)a, \frac{5}{6}a$.

190—216. Эти задачи решаются удобнее всего в полярной системе координат ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$).

190. $\frac{a^3}{900}(88\sqrt{5}-125\sqrt{2})$. **191.** $\frac{\pi}{8}(a_1-a).\frac{R^3}{c}$.

192. $\frac{\pi c^3}{8}$ (положить $x=\frac{c}{2}+r\cos\theta$, $y=\frac{c}{2}+r\sin\theta$). **193.** $\frac{3\pi}{32}\cdot\frac{a^4}{c}$.

194. $\frac{81}{32}\pi a^3$ (положить $x=-\frac{a}{2}+r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$). **195.** $\frac{a^4}{24c}$.

196. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}\frac{a^4}{c}$. **197.** $\frac{\pi a^3}{12}$. **198.** $\frac{a^4}{192\sqrt{pq}}\left\{19-4\left(\frac{2p+q}{p+q}\right)^2+\right.$

$\left.+\frac{3}{\sqrt{pq}}(5q-p)\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{q}{p}}\right\}$. **199.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **200.** $2\pi a\left(c^2-\frac{1}{3}a^2\right)-$

правая часть (проектировать на плоск. YOZ). **201.** $\frac{2}{9}a^3$. **202.** $\frac{\pi^2}{16}aR^2$.

203. $\pi R^2\left[c+\frac{R^2}{4}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\right]$. **204.** $\frac{1}{2}\pi a^3$ (проектировать на плоск. XOZ). **205.** $\frac{35}{16}\cdot\frac{\pi a^4}{c}$. **206.** $\frac{16}{9}(4\sqrt{2}-5)a^3$. **207.** $\frac{16}{9}(4\sqrt{2}-5)a^3$.

208. $\frac{R^4}{4c\sin\alpha}, \frac{R^4}{16c}\cot\frac{\alpha}{2}$. **209.** $\frac{1}{4}MR^2$. **210.** $\frac{7}{16}Ma^2$. **211.** $\frac{3\pi-8}{48}Ma^2$.

212. $x_c = y_c = \frac{4R}{3\pi}$, если принять за оси координат крайние радиусы.

213. На среднем радиусе в расстоянии $\frac{4}{3}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\alpha}\cdot R$ от центра.

214. $x_c=\frac{5}{6}a,\ y_c=\frac{16}{9\pi}a$. **215**. $x_c=\frac{\pi\sqrt{2}}{8}a,\ y_c=\frac{1}{12}\left[3\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})-2\right]a$. **216**. $x_c=y_c=\frac{4\pi\sqrt{3}}{27}a$.

218—270. Эти задачи решаются удобнее всего в системе координат $x=a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\sin\varphi$.

218. $\frac{a^2b^2}{c^2}$. **219**. $\frac{1}{2}\pi ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **220**. $\frac{3}{8}\pi ab\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)$.

221. $ab\left\{\frac{ab}{hk}+\left(\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{k^2}\right)\operatorname{arc}tg\frac{ak}{bh}\right\}$. **222**. $\frac{5}{32}\pi ab\left(\frac{a^6}{h^6}+\frac{b^6}{k^6}\right)$.

223. $\frac{3}{2}\cdot\frac{a^3b^3}{c^4}$. **224** $\frac{\pi}{4}\cdot\frac{a^2b^2}{c^2}$. **225**. $\frac{3}{16}\pi\sqrt{2}\cdot\frac{a^7b}{c^6}$. **226**. $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)ab$.

227. $\frac{2}{3}\pi ab\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)$. **228**. $\frac{3}{2}\pi ab$. **229**. $\frac{7\pi}{512}\cdot\frac{a^9b^3}{c^{10}}$. **230**. $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{a^5b^3}{c^6}$.

231. $\frac{1}{210}\cdot\frac{b^7}{a^5}$. **232**. $\frac{1}{10}\cdot\frac{b^5}{ac^2}$. **233**. $\frac{1}{60}\cdot\frac{b^5}{a^3}$. **234**. $\frac{2\pi\sqrt{3}}{27}\cdot\frac{ab^5}{c^4}$.

235. $\frac{1}{6}\cdot\frac{a^3b^3}{c^4}$. **236**. $\frac{3\pi}{4}\cdot\frac{b^5}{ac^2}$. **237**. $\frac{8}{15}b^2\sqrt{\frac{b}{a}}\,(x=\sqrt{a}.\rho\cos\varphi, y=\sqrt{b}\rho\sin\varphi)$.

238. $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{c^5}{(ab)^{3/2}}$ (см. 237). **239**. $\frac{4}{105}\frac{b^3}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}$ (см. 237).

240. $\frac{9}{28}b^2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\ (x=\sqrt[3]{a}\,\rho\cos\varphi,\ y=\sqrt[3]{b}\,\rho\sin\varphi)$.

241. $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\cdot\frac{c^4}{ab}\sqrt[4]{\frac{b}{a}}$ (положить $x=\sqrt[4]{a}\,\rho\cos\varphi,\ y=\sqrt[4]{b}\,\rho\sin\varphi$).

242. $3\pi\cdot\frac{c^4}{\sqrt[6]{ab^3}}\ (x=\sqrt[6]{a}\,\rho\cos\varphi,\ y=\sqrt[6]{b}\,\rho\sin\varphi)$.

243. $\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{2n}}\cdot\left\{\frac{c^3}{b}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2n}}+\frac{d^3}{a}\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2n}}\right\}\ (x=a^{\frac{1}{2n}}\rho\cos\varphi,\ y=b^{\frac{1}{2n}}\rho\sin\varphi)$.

244. $\frac{\pi}{n}\cdot\frac{c^3}{\sqrt{ab}}$ при n нечетном, $\frac{\pi}{2n}\cdot\frac{c^3}{\sqrt{ab}}$ при n четном (см. 243).

245. $\frac{4n\pi}{2n+1}abc.$ **246.** $\frac{\pi ab}{8}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$ **247.** $\frac{1}{8}\cdot\frac{a^2b^2}{c}.$

248. $\frac{\pi^2}{2}abc.$ **249.** $\frac{\pi k}{k+1}abc.$ **250.** $\frac{4}{9}\cdot\frac{a^4bc}{h^3}.$ **251.** $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2bc}{h}.$

252. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}abc.$ **253.** $\frac{\pi}{12}\cdot\left(\frac{ab}{c}\right)^3.$ **254.** $\frac{\pi}{8}\cdot\frac{a^3b^3}{c^4}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$

255. $\frac{81}{32}\pi abc$ $\left(x=-\frac{a}{2}+a\rho\cos\varphi,\ y=b\rho\sin\varphi\right)$. **256.** $\frac{1}{8}\cdot\frac{a^2b^2}{c}\left[\frac{a^2b^2}{h^2k^2}+\right.$ $\left.+\frac{\pi}{4}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)\right].$ **257.** $\frac{ab}{4}\left[\frac{ab}{\sqrt{pq}}+\left(\frac{a^2}{p}-\frac{b^2}{q}\right)\operatorname{arc}tg\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{q}{p}}\right)\right].$

258. $\pi abc.$ **259.** $2abc$ (об'ем каждого кольца). **260.** Об'ем n-го кольца $(8n-6)abc.$ **261.** $\pi abc.$ **262.** $\frac{\pi}{16}\cdot\frac{ab^3c}{h^2}.$ **263.** $\frac{8}{3}abc\cdot\operatorname{arc}tg\left(\frac{ka}{b}\right).$

264. $\frac{\pi}{8}abc.$ **265.** $\frac{16}{9}abc.$ **266.** $\frac{16}{9}(4\sqrt{2}-5)abc.$ **267.** $\frac{1}{4}Mb^2,\ \frac{1}{4}Ma^2.$

268. $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4b}{3\pi}\right).$ **269.** $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\cdot\frac{a^3b}{c^3},\frac{1}{4}\cdot\frac{a^2b^2}{c^3}\right).$ **270.** $\left(\frac{64}{147\pi}\cdot\frac{a^5b}{c^5},\frac{33}{448}\cdot\frac{a^4b^2}{c^5}\right).$

271—301. Эти задачи решаются помощью системы координат $x=a\rho\cos^2\varphi,\ y=b\rho\sin^2\varphi$; см. также прим. 238 отд. II. **271.** $\frac{1}{12}ab.$

272. $\frac{1}{10}\cdot\frac{a^5b}{h^4}.$ **273.** $\frac{1}{60}\cdot\frac{a^3b^3}{c^4}.$ **274.** $\frac{a^3}{4h}\cdot\frac{1}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}.$ **275.** $\frac{1}{10}\cdot\frac{(ab)^5}{(ak+bh)^4}.$

276. $\frac{1}{210}\cdot\frac{a^5b^3}{c^6}.$ **277.** $\frac{1}{6}ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).$ **278.** $\frac{1}{6}\cdot\frac{a^4bk}{h^2}\cdot\frac{ak+2bh}{(ak+bh)^2}.$

279. $\frac{1}{1260}\cdot\frac{a^5b^5}{c^8}.$ **280.** $\frac{a^5bk}{8h^3(ak+bh)^3}(a^2k^2+3abhk+3b^2h^2).$

281. $\frac{1}{8}ab\left(\frac{a^3}{h^3}+\frac{b^3}{k^3}\right).$ **282.** $\frac{ab}{2n-2}\left[\left(\frac{a}{h}\right)^{n-2}+\left(\frac{b}{k}\right)^{n-2}\right].$

283. $\frac{(ab)^{2n+1}}{2c^{4n}}\cdot\frac{(1\cdot2\cdot3\cdots2n)^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(4n+1)}.$ **284.** $\frac{ab}{12}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right).$

285. $\frac{13}{72}(2\pi+3\sqrt{3})(ab)^{3/2}$. **286.** $\frac{\pi}{24}(5\sqrt{2}-4)\,abc$. **287.** $\frac{1}{3}\,abc$.

288. $\frac{k}{2(k+2)}abc$. **289.** $\frac{k}{2k+2}abc$. **290.** $\frac{1}{8}\pi abc$. **291.** $\frac{1}{560}\cdot\frac{a^2b^2}{c}$.

292. $\frac{5\pi}{512}\cdot\frac{(ab)^{3/2}}{c}\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$. **293.** $\frac{1}{5}\,abc$. **294.** $\frac{5\pi}{384}(ab)^{3/2}$.

295. $\frac{1}{12}\cdot\frac{a^3bck}{h(ak+bh)}$. **296.** Об'ем n-ой трубки: $\frac{4n-3}{\pi}abc$. **297.** Об'ем каждой трубки $\frac{1}{\pi}abc$. **298.** $\frac{1}{4}abc$.

299. $\frac{1}{2}abc$. **300.** $\left(\frac{7}{12}a, \frac{35}{36}b\right)$. **301.** $\left(\frac{3\pi}{64}a, \frac{3\pi}{64}b\right)$.

302—312. В этих задачах следует взять координаты $x = a\rho\cos^3\varphi$, $y = b\rho\sin^3\varphi$.

302. $\frac{7}{128}(2\pi+3\sqrt{3})\,ab$. **303.** $\frac{21\pi}{256}ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **304.** $\frac{1}{8}\left(\frac{a^2b^2}{c}\right)^{3/2}$.

305. $\frac{1}{2}\pi abc$. **306.** $\frac{3}{16}\pi^2 abc$. **307.** $\frac{3k}{4k+2}\pi abc$. **308.** $\frac{45\pi}{16384}\cdot\left(\frac{ab}{h}\right)^2\cdot\sqrt[3]{abc}$.

309. $\frac{15}{256}\pi ab\left(\frac{a^2}{p}+\frac{b^2}{q}\right)$. **310.** $\frac{2}{9}abc(9\sqrt{3}-2\pi)$. **311.** $\frac{3991}{16384}$.

312. Об'ем каждого кольца $\frac{3}{4}abc$.

313—319. В этих задачах следует взять координаты $x = a\rho\cos^4\varphi$, $y = b\rho\sin^4\varphi$.

313. $\frac{55}{64}ab$. **314.** $\frac{1}{42}ab\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$. **315.** $\frac{1}{30}\frac{(ab)^{3/2}}{c}$. **316.** $\frac{1}{24}\pi abc$.

317. $\frac{k}{2}\cdot\frac{abc}{3k+6}$. **318.** $\frac{k}{6k+6}abc$. **319.** $\frac{1}{12}\sqrt{\pi}\cdot abc$.

320—361. Если область интегрирования на плоскости XOY определяется уравнениями $f(x, y)=u_0$, $f(x, y)=u_1$, $F(x, y)=v_0$, $F(x, y)=v_1$, то берем систему координат u и v, определяемую уравнениями: $f(x, y)=u$, $F(x, y)=v$. Решая ее относительно x и y, находим $x=\varphi(u, v)$, $y=\psi(u, v)$ и составляем якобиан $J = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$, после чего интеграл $\iint\Theta(x, y)\,dxdy$, распростра-

ненный по вышеупомянутой области значений x и y, обратится в интеграл $\int_{u_0}^{u_1}\int_{v_0}^{v_1}\Theta\ (\varphi,\ \psi).\ |J|\ dudv$ с постоянными пределами интегрирования по обоим переменным. Если еще $\Theta\ (\varphi,\ \psi).\ |J| = \lambda\ (u)\ .\ \mu\ (v)$, то предыдущий интеграл приводится к произведению двух простых интегралов: $\int_{u_0}^{u_1}\lambda\ (u)\ du\cdot\int_{v_0}^{v_1}\mu\ (v)\ dv$.

320. $\frac{7}{120}a^2\left(x=\frac{au}{u+v}, y=\frac{a}{u+v}\right)$. **321.** $\frac{a^4}{2592000}\left[\frac{44797}{p}+\frac{17353}{q}\right]$ (см. 320). **322.** $\frac{3}{2}a^3$ (см. 320). **323.** $\frac{2}{\pi}a^3$ (см. 320).

324. $\frac{1}{2}(a^2-b^2)\cdot\frac{\alpha-\beta}{(1+\alpha)\ (1+\beta)}\ \left(x=\frac{u}{1+v},\ y=\frac{uv}{1+v}\right)$.

325. $\frac{2}{3}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\ (\sqrt{m^3}-\sqrt{n^3})\ (x=\sqrt{uv},\ y=v)$.

326. $\frac{(a-b)\ (m-n)}{12c^2}\ [(a^2+ab+b^2)\ (m+n)+(m^2+mn+n^2)\ (a+b)]$ (см. 325). **327.** $(a^2-b^2)\log\frac{m}{n}\ \left(x=\frac{u^2}{v},\ y=v\right)$. **328.** $\frac{e-1}{e^2}\cdot(m-n)\ a^2$ (см. 327). **329.** $\frac{1}{6}(m^2-n^2)(\alpha^3-\beta^3)\ (x=uv^2,\ y=uv)$.

330. $\frac{2}{27}(m^3-n^3)\ (\alpha^{9/2}-\beta^{9/2})$(см. 329). **331.** $\frac{\alpha^6-\beta^6}{24}\cdot\frac{m^4-n^4}{c}$(см. 329).

332. $\frac{m^3-n^3}{12\pi}[\cos(\pi\beta^4)-\cos(\pi\alpha^4)]$ (см. 329). **333.** $\frac{1}{2}(a^2-b^2)\log\frac{\alpha}{\beta}$ $\left(x=uv,\ y=\frac{u}{v}\right)$. **334.** $\frac{15}{2}log3\ .\frac{a^4}{c}$(см. 333). **335.** $\frac{7}{3}\ log\ \frac{3}{2}\ .\ a^3$ (см. 333). **336.** $\frac{1}{8}a^4\left(\frac{6}{p}+\frac{1}{q}\right)$(см. 333). **337.** $\frac{1}{\pi}\ (\sqrt{2}+2)log^2.a^2c$ (см. 333).

338. $\frac{4}{\pi^2}(\pi-1)\cdot a^2c$ (см. 333). **339.** $\frac{1}{3}(a-b)(m-n)\left(x=u^{2/3}v^{1/3},\ y=u^{1/3}v^{2/3}\right)$. **340.** $\frac{5}{4}\cdot\frac{a^2b^2}{c}$(см. 339). **341.** $\frac{728}{27}\ (ab)^{3/2}$ (см. 339).

342. $\frac{128}{3\pi^3}.\ a^3$(см. 339). **343.** $\frac{256}{3\pi^4}\ (\pi-2)a^3$. (см. 339).

344. $\frac{1}{3}(a^2-b^2)\log\frac{m}{n}\left(x=u^{\frac{4}{3}}v^{-\frac{1}{3}}, y=u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}\right)$.

345. $\frac{14}{9}\log 3.a^3$ (см. 344). **346.** $\frac{1}{2}\log 2.\frac{a^4}{c}$ (см. 344).

347. $\frac{4}{3\pi}(2+\sqrt{2})\,a^2b$ (см. 344). **348.** $\frac{1}{2}(a-b)(c-d)$ $(x=u^{3/4}v^{1/4},$ $y=u^{1/4}v^{3/4})$. **349.** $\left|\frac{k-1}{k+1}\right|(a-b)(c-d)\left(x=u^{\frac{k}{k+1}}v^{\frac{1}{k+1}},\right.$ $\left.y=u^{\frac{1}{k+1}}v^{\frac{k}{k+1}}\right)$. **350.** $\frac{1}{15}(a^5-b^5)\left(\frac{1}{d^3}-\frac{1}{c^3}\right)\left(x=\frac{u^2}{v}, y=\frac{u^3}{v^2}\right)$.

351. $\frac{1}{12}(a^6-b^6)\left(\frac{1}{d^4}-\frac{1}{c^4}\right)\left(x=\frac{v^2}{u}, y=\frac{v^4}{u^3}\right)$.

352. $\frac{k-l}{|(k+1)(l+1)|}\left(a^\lambda-b^\lambda\right)\left(\frac{1}{d^\mu}-\frac{1}{c^\mu}\right)$, $\lambda=\frac{(k-1)(l+1)}{k-l}$, $\mu=\frac{(k+1)(l-1)}{k-l}=\lambda-2\left(x=u^{\frac{k-1}{k-l}}v^{-\frac{l-1}{k-l}},\right.$ $\left.y=u^{\frac{l(k-1)}{k-l}}v^{-\frac{k(l-1)}{k-l}}\right)$. **353.** $\frac{1}{2}(a^2-b^2).\frac{k-1}{k+1}\left(\alpha^\lambda-\beta^\lambda\right)$, $\lambda=\frac{k+1}{k-1}\left(x=uv^{\frac{1}{k-1}}, y=uv^{\frac{k}{k-1}}\right)$. **354.** $\left|\frac{k-1}{k+1}\right|(c^2-d^2)\log\frac{a}{b}$ $\left(x=u^{\frac{k-1}{k+1}}v^{\frac{2}{k+1}}, y=u^{-\frac{k-1}{k+1}}v^{\frac{2k}{k+1}}\right)$. **355.** $\left(x=\frac{u-v}{2}, y=\sqrt{uv}\right)$ $\frac{1}{3}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(a+b+m+n+\sqrt{ab}+\sqrt{mn}\right)$.

356. $\frac{am(a+m)}{192c^2}\left[am+3(a-m)^2\right]$ (см. 355).

357. $\frac{1}{4}(a^2-b^2)\left[\frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}+\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right]\cdot\left(x=\frac{uv}{1+v^2},\right.$ $\left.y=\frac{u}{1+v^2}\right)$. **358.** $\frac{1}{4}a^2\operatorname{arctg}\frac{a(b-b_1)}{a^2+bb_1}+\frac{1}{4}b^2\operatorname{arctg}\frac{b(a-a_1)}{b^2+aa_1}-$ $-\frac{1}{4}a_1^2\operatorname{arctg}\frac{a_1(b-b_1)}{a_1^2+bb_1}-\frac{1}{4}b_1^2\operatorname{arctg}\frac{b_1(a-a_1)}{b_1^2+aa_1}-$ $-\frac{1}{4}(a-a_1)(b-b_1)$ (Коорд. $x=\frac{u}{u^2+v^2}, y=\frac{v}{u^2+v^2}$).

359. $\frac{c^2}{4}\Big[(v_1 - v_0)(\mathrm{sh}\, 2u_1 - \mathrm{sh}\, 2u_0) - (u_1 - u_0)(\sin 2v_1 - \sin 2v_0)\Big]$

$\left(x = c\,\mathrm{ch}u \cos v,\ y = c\,\mathrm{sh}u \sin v,\ \mathrm{J} = \frac{1}{2}c^2(\mathrm{ch}\, 2u - \cos 2v)\right).$

360. (Система: $x = \sqrt{r^2+c^2}\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$).

$\frac{1}{2}(a_1b_1 - ab)\operatorname{arctg}\frac{mn_1 - nm_1}{mm_1 + nn_1} - \frac{1}{2}(m_1n_1 - mn)\log\frac{a_1+b_1}{a+b}.$

361. $\frac{(b_1{}^2 - b^2)(n_1{}^2 - n^2)}{8c^2k}\left\{b_1{}^2 + b^2 + n_1{}^2 + n^2\right\}$ (см. 360).

364. $\int\limits_{v=\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}}\int\limits_{u=0}^{\frac{c}{1-v}} \mathrm{f}\,(u - uv,\ uv)\, u\, du\, dv.$

365. $\int\limits_{u=\alpha}^{\infty}\int\limits_{v=0}^{\infty} f\left[\frac{\alpha c}{u+v}, \frac{\alpha cu}{u+v}\right]\frac{\alpha^2c^2}{(u+v)^3}du dv.$

366. $\int\limits_{\theta=\operatorname{arctg}\frac{b}{2a}}^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}\int\limits_{r=\frac{3}{\frac{\cos\theta}{a}+\frac{\sin\theta}{b}}}^{r=\frac{2a}{\cos\theta}} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta +$

$+\int\limits_{\theta=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}}^{\operatorname{arctg}\frac{2b}{a}}\int\limits_{r=\frac{3}{\frac{\cos\theta}{a}+\frac{\sin\theta}{b}}}^{\frac{2b}{\sin\theta}} \mathrm{f}\,(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$

367. $\int\limits_{v=0}^{\frac{1}{\alpha}}\int\limits_{u=\frac{1}{\alpha}-v}^{\frac{1}{\alpha}} \mathrm{f}\left(\frac{au}{u+v}, \frac{a}{u+v}\right)\frac{a^2\,du dv}{(u+v)^3} + \int\limits_{v=\frac{1}{\alpha}}^{\infty}\int\limits_{u=0}^{\frac{1}{\alpha}} \mathrm{f}\cdot\frac{a^2\,du dv}{(u+v)^3}.$

368. $\frac{1}{\alpha}\int\limits_{v=0}^{\frac{b}{\alpha a+b}}\int\limits_{u=0}^{\frac{\alpha a}{1-v}} f\left(\frac{u}{\alpha}(1-v),\, uv\right). u\, du\, dv +$

$+\frac{1}{\alpha}\int\limits_{v=\frac{b}{\alpha a+b}}^{1}\int\limits_{u=0}^{\frac{b}{v}} f\left(\frac{u}{\alpha}(1-v),\, uv\right). u\, du\, dv.$

369—398. Эти задачи решаются в прямоугольной системе координат.

369. $8a^2 \cdot \arcsin\frac{b}{a}$ (первое интегр. по у). **370.** $8a\left[a \cdot \arcsin\frac{a}{b} - b + \right.$ $\left. + \sqrt{b^2-a^2}\right]$. **371**. $4a^2$. **372**. $2a\left[(2a-b)\arcsin\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{a(b-a)}\right]$.

373. $8\sqrt{2}\,ab$. **374**. $2\pi a^2$. **375**. $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi a^2$. **376**. $2\sqrt{2}\pi a^2$.

377. $\frac{\alpha}{3}(3\sqrt{3}-1)c^2$. **378**. $\alpha a(a-c)$. **379**. $\frac{8a^2}{3c}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

380. $4ac$. **381**. $\frac{20}{3}c^2\sqrt{2}$ **382**. $4b\sqrt{a^2-c^2}$. **383**. $\frac{2a}{b}(a^2-c^2)$.

384. $\frac{24}{7}a\sqrt{2pa}$. **385**. $\frac{24}{5}a^2$. **386**. $\frac{24}{13}a^2\sqrt{\frac{a}{b}}$. **387**. πa^2 **388**. $\frac{2}{3}\pi a^2$.

389. $8a^2(\sqrt{2}-1)$. **390**. $3\pi ab$. **391**. $\frac{a^2}{54}(10\sqrt{10}-1)$. **392**. $16a\sqrt{ap}$.

393. $\frac{4\sqrt{2}}{3}(a+b)\sqrt{ab}$ **394**. $\frac{1}{3}(\alpha-\beta)p^2\left[\left(1+\frac{a^2}{p^2}\right)^{3/2}-1\right]$.

395. $\frac{4}{3}p\sqrt{pq}\left[\left(1+\frac{2a}{p}\right)^{3/2}-1\right]$. **396**. $4c\left[b+\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\frac{b}{a}\right]$.

397. $\frac{4\sqrt{2}}{105}a\sqrt[4]{2pa}\left[15\sqrt{a}+7\sqrt{2p}\right]$. **398**. $\left(a+\frac{1}{4}p\right)^2\arccos\frac{p-4a}{p+4a} +$

$+\left(a-\frac{p}{4}\right)\sqrt{ap}$.

399—415. Эти задачи решаются в полярной системе координат.

399. $\frac{\pi}{4}\left[R\sqrt{c^2+R^2}+c^2\log\frac{R+\sqrt{c^2+R^2}}{c}\right]$.

400. $\frac{2}{3}\pi a^2\left[\left(\frac{4c}{a}-3\right)^{3/2}-1\right]$. **401.** $\frac{\pi}{3}c^2\sin^2\alpha\left[\left(1+\frac{R^2}{c^2\sin^2\alpha}\right)^{3/2}-1\right]$.

402. $\frac{1}{2}\pi a\left[\sqrt{a^2+9c^2}+\frac{a^2}{3c}\log\frac{3c+\sqrt{a^2+9c^2}}{a}\right]$. **403.** $\frac{1}{9}a^2(20-3\pi)$.

404. $\frac{1}{9}c^2(20-3\pi)$. **405.** $\frac{4\pi abh}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}$. **406.** $4\pi h\sqrt{ab}$.

407. $\frac{1423}{9720}\pi c^2$. **408.** $2\pi a^2\left[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\right]$. **409.** Нижняя часть $4\pi c(c-a)$. **410.** $\frac{2\pi}{a}\left[a^3-\sqrt{a^2-R^2}\cdot\sqrt{a^4+(c^2-a^2)R^2}\right]+$

$$+\frac{2\pi ac^2}{\sqrt{c^2-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{c^2-a^2}\left[\sqrt{a^4+(c^2-a^2)R^2}-a\sqrt{a^2-R^2}\right]}{(c^2-a^2)\sqrt{a^2-R^2}+a\sqrt{a^4+(c^2-a^2)R^2}}.$$

411. $\frac{2\pi}{a}\left[a^3-\sqrt{a^2-R^2}\sqrt{a^4+(c^2-a^2)R^2}+\right.$

$$\left.+\frac{\pi ac^2}{\sqrt{a^2-c^2}}\log\frac{(a+\sqrt{a^2-c^2})(\sqrt{a^4-R^2(a^2-c^2)}-\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-R^2})}{(a-\sqrt{a^2-c^2})(\sqrt{a^4-R^2(a^2-c^2)}+\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{a^2-R^2})}\right].$$

412. Сферич. поверхн. $2\pi a^2(3-\sqrt{3})$, параб. поверхн. $2\pi a^2\left(\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)$.

413. Сферич. пов. $4\pi R^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, конич. пов. $\pi R^2\sin\alpha$.

414. $16a^2(\sqrt{2}-1)$. **415.** $16a^2(\sqrt{2}-1)$. **416.** $\frac{1}{2}\pi a^2\int_{\psi_0}^{\psi_1}f(\psi)\sqrt{[f(\psi)]^2+[f'(\psi)]^2}\,d\psi$ ($x=a\sin^2\theta\cos\psi f(\psi)$, $y=a\sin^2\theta\sin\psi f(\psi)$, $z=a\sin^2\theta\cos\theta f(\psi)$, $p=\frac{1}{\sin 2\theta f(\psi)}[\cos 2\theta\cos\psi f(\psi)-\sin\psi f'(\psi)]$, $q=\frac{\cos 2\theta\sin\psi f(\psi)+\cos\psi f'(\psi)}{\sin 2\theta f(\psi)}$, $J=a^2\sin^2\theta\sin 2\theta f^2(\psi)$). **417.** $\frac{\pi^2a^2}{2}$.

418. $\frac{16}{3}\pi a^2$. **419.** $\frac{3}{4}\pi a^2\left[2+\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})\right]$.

420. $2\pi\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{(\varphi\varphi'+\psi\psi')^2+(\varphi^2+\psi^2)\omega'^2}\,dt$. (Уравнение поверхности получается исключением t из системы: $x^2+y^2=\varphi^2+\psi^2$, $z=\omega$; отсюда

$p = \frac{\omega'.x}{\varphi\varphi' + \psi\psi'}, q = \frac{\omega'.y}{\varphi\varphi' + \psi\psi'}, rdr = (\varphi\varphi' + \psi\psi')\,dt\Big)$. **421**. $\frac{2}{3}\pi ab$.

$.(2\sqrt{2} - 1)$. **422**. $\frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 1)\,ab\,.\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt{\frac{a}{b}}$. **423**. $\frac{1}{9}ab\,(20 - 3\pi)$ (координаты $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, как в 421 и 422).

424. $\frac{1}{2}\pi R^2\,(\sqrt{2} - 1)$. $(x = R\rho\cos^2\varphi,\ y = R\rho\sin^2\varphi)$.

425. $\frac{1}{12c^2(a^2+b^2)}\left[(a^2b^2 + 4a^2c^2 + 4b^2c^2)^{3/2} - a^3b^3\right]$ $(x = a\rho\cos^2\varphi,$ $y = b\rho\sin^2\varphi)$. **426**. $\frac{1}{4}\sqrt{a^2b^2 + 9a^2c^2 + 9b^2c^2} + \frac{a^2b^2}{12c\sqrt{a^2+b^2}}$

$\log\frac{3c\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2b^2 + 9a^2c^2 + 9b^2c^2}}{ab}$ (см. 425).

427. $\frac{4}{15}ab\,(1 + \sqrt{2})$ (см. 425). **428**. $\frac{3}{4}c^2\left[2 + 5\ \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$ $(x = c\rho\cos^3\varphi,\ y = c\rho\sin^3\varphi)$.

429. $\frac{1}{2}MR^2$. **430**. $\frac{2}{3}MR^2$. **431**. $\frac{55 + 9\sqrt{3}}{65}Mc^2$. **432**. $\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right)$.

433. $\left(0, 0, \frac{2}{3}H\right)$. **434**. $\left(0, 0, \frac{55 + 9\sqrt{3}}{130}c\right)$. **435**. На перпендикуляре, опущенном из центра сферы на основание сегмента, в расстоянии $\frac{r_0^2}{2h}$ от центра сферы. **436**. $\frac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)(x = a\rho\cos\varphi, y = b\rho\sin\varphi)$.

437. $\frac{2\pi a}{c\,(n-2)}\left[\frac{1}{(c-a)^{n-2}} - \frac{1}{(c+a)^{n-2}}\right]$ при $n \gtrless 2$, $\frac{2\pi a}{c}\log\frac{c+a}{c-a}$ при $n = 2$ (положить $x = a\sin u\cos v$, $y = a\sin u\sin v$). **438**. Ввести координаты $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$. **439**. При $z > a$: $\frac{E}{2\sqrt{a^2-b^2}}$. $\log\frac{z + \sqrt{a^2-b^2}}{z - \sqrt{a^2-b^2}}$, при $z < a$: $\frac{E}{2\sqrt{a^2-b^2}}.\log\frac{a + \sqrt{a^2-b^2}}{a - \sqrt{a^2-b^2}}$ (ввести полярные координаты). **440**. При $z > b$: $\frac{E}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}$,

при $z \leq b$: $\frac{E}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{arc\,tg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

441—476. Эти об'емы вычисляются помощью сферических координат: $x=\rho\sin\theta\cos\psi$, $y=\rho\sin\theta\sin\psi$, $z=\rho\cos\theta$.

441. $\frac{4}{3}\pi R^3(\cos^4\alpha-\cos^4\beta)$. **442**. $\frac{1}{3}\pi a^3$. **443**. $\frac{1}{3}\pi a^3$. **444**. $\frac{a^3}{360}$.

445. $\frac{\pi}{60}a^3$. **446**. $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{8}a^3$. **447**. $\frac{32}{315}a^3$. **448**. $\frac{1}{6}a^3$. **449**. $\frac{64\pi}{105}a^3$.

450. $\frac{5\sqrt{2}}{24}\pi a^3$. **451**. $\frac{1}{3}a^3$. **452**. $\frac{32}{315}a^3$. **453**. $\frac{\pi}{168}a^3$. **454**. $\frac{\pi}{12}a^3$.

455. $\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-5)}{2.4.6\ldots(2n-2)}$. **456**. $\frac{5}{3}\sqrt{2}\pi a^3\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-7)}{2.4.6\ldots(2n-2)}$.

457. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}a^3$. **458**. $\frac{2}{3}\pi a^3$. **459**. $\frac{\pi}{12}a^3$. **460**. $\frac{\pi^2}{6}a^3$. **461**. $\frac{\pi^2}{12}a^3$.

462. $\frac{2}{3}a^3$. **463**. $\frac{2}{27}\pi\sqrt{3}.a^3$. **464**. $\frac{4}{9}\pi^2a^3$. **465**. $\frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}}.a^3$.

466. $2\pi^2R^2a$. **467**. $\frac{\pi}{24}(14+3\pi)a^3$. **468**. $\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)a^3$. **469**. $\frac{4}{3}\pi a^3$.

470. $\frac{2}{3}\pi^2a^3$. **471**. $\frac{8}{3}a^3$. **472**. $\frac{2\pi}{3}\left(e-\frac{1}{e}\right)a^3$. **473**. $\frac{\pi}{6}a^3$. **474**. $\frac{5\pi^2}{8}a^3$.

475. $\frac{\pi}{4}a^3$. **476**. $\frac{\pi^2}{64}(a+b)(5a^2-2ab+5b^2)$.

477—506. Эти об'емы вычисляются помощью координат $x=a\rho\sin\theta\cos\psi$, $y=b\rho\sin\theta\sin\psi$, $z=c\rho\cos\theta$.

477. $\frac{\pi}{72}(5-3\sqrt{2})abc$. **478**. $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{a^2bc}{h}$. **479**. $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{abc^2}{h}$.

480. $\frac{1}{360}\cdot\frac{a^4b^4c^4}{h^9}$. **481**. $\frac{\pi^2}{4}\frac{abck}{\sqrt{c^2+k^2}}$.

482. $\frac{\pi}{960}\cdot\frac{abc^4}{l^3}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\left(5\frac{a^4}{h^4}-2\frac{a^2b^2}{h^2k^2}+5\frac{b^4}{k^4}\right)$ **483**. $\frac{4\pi}{21}\cdot\frac{abc^7}{h^6}$.

484. $\frac{\pi}{12}\cdot\frac{a^3bc^2}{h^3}$. **485**. $\frac{32}{315}\cdot\frac{a^4b^4c}{h^6}$.

486. $\frac{\pi}{12}\cdot abc.\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}}\left(2\frac{a^4}{h^4}+\frac{a^2b^2}{h^2k^2}+2\frac{b^4}{k^4}\right)$. **487**. $\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{h^3}$.

488. $\frac{1}{3}\frac{abc^2}{l}\left[\frac{ab}{hk}+\left(\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{k^2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$. **489.** $\frac{\pi}{4}\cdot\frac{abc^2}{l}\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)$

490. $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{a^2bc}{h}$. **491.** $\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{abc^2}{k}$. **492.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}abc\sqrt{\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}}$.

493. $\frac{\pi}{192}\cdot\frac{abc^4}{l^3}\cdot\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)\left(5\frac{a^4}{h^4}-2\frac{a^2b^2}{h^2k^2}+5\frac{b^4}{k^4}\right)$.

494. $\frac{1}{3}\cdot\frac{abc^4}{l^3}\left[\frac{ab}{hk}+\left(\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{k^2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

495. $\frac{\pi^2}{96}\cdot\frac{abc^2}{l}\left[3\frac{a^4}{h^4}+2\frac{a^2b^2}{h^2k^2}+3\frac{b^4}{k^4}\right]$. **496.** $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{h^3}$.

497. $\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi.\frac{a^2b^2c^2}{h^3}$. **498.** $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{27}\cdot\frac{abc^2}{l}\cdot\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$.

499. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{27}\cdot\frac{abc^2}{l}\left[\frac{ac}{hk}+\left(\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{k^2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

500. $\frac{\pi^2}{3n\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{abc^2}{l}$. **501.** $2\pi^2(1-\alpha^2)abc$. **502.** $\frac{8}{3}\pi abc(1-\alpha^2)^{3/2}$.

503. $\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)\cdot\frac{abc^2}{l}$. **504.** $\frac{4}{3}\cdot\frac{abc^2}{l}$. **505.** $\frac{8\pi}{9}\cdot\frac{abc^4}{l^3}$. **506.** $\frac{\pi^2}{3}\cdot\frac{abc^3}{l^2}$.

507—537. Эти задачи решаются помощью системы координат $x=a\rho\sin^2\theta\cos^2\psi$, $y=b\rho\sin^2\theta\sin^2\psi$, $z=c\rho\cos^2\theta$ (см. 238 II).

507. $\frac{49}{864}a^3$. **508.** $\frac{1}{60}\cdot\frac{abc^4}{l^3}$. **509.** $\frac{1}{60}abc\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$.

510. $\frac{1}{60}abc\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^4\cdot\frac{1}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$ **511.** $\frac{1}{60}\cdot\frac{abch(5c+4h)}{(c+h)^2}$.

512. $\frac{4}{105}abc\cdot\left(\frac{a}{h}\right)^{3/2}$. **513.** $\frac{2}{21}abc$. **514.** $\frac{1}{168}\cdot\frac{abc^7}{h^6}$.

515. $\frac{4}{105}abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^{5/2}-\left(\frac{b}{k}\right)^{5/2}}{\frac{a}{h}-\frac{b}{k}}$. **516.** $\frac{4}{105}abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^{5/2}}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$.

517. $\frac{1}{168}abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^7-\left(\frac{b}{k}\right)^7}{\frac{a}{h}-\frac{b}{k}}$. **518.** $\frac{1}{168}abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^7+\left(\frac{b}{k}\right)^7}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$.

519. $\frac{1}{360}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{h^3}$. **520.** $\frac{1}{12}\cdot\frac{abc^4}{h^3}$. **521.** $\frac{\pi}{64}abc\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$.

522. $\frac{\pi}{64}abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$. **523.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{243}\cdot\frac{abc^7}{h^6}$. **524.** $\frac{10\pi\sqrt{3}}{3^5.7}abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^7-\left(\frac{b}{k}\right)^7}{\frac{a}{h}-\frac{b}{k}}$.

525. $\frac{10\pi\sqrt{3}}{3^5.7}abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^7+\left(\frac{b}{k}\right)^7}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$. **526.** $\frac{\pi}{3n\sin\frac{2\pi}{n}}\cdot abc\cdot\left(\frac{c}{h}\right)^{n-3}$.

527. $\frac{1}{3(n-1)(n-2)}\cdot abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^{n-2}-\left(\frac{b}{k}\right)^{n-2}}{\frac{a}{h}-\frac{b}{k}}$.

528. $\frac{1}{3}\cdot\frac{(n-k)^2}{(2n+k)(n+2k)}\cdot abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{p}\right)^\lambda-\left(\frac{b}{q}\right)^\lambda}{\frac{a}{p}-\frac{b}{q}},\ \lambda=\frac{n+2k}{n-k}$.

529. k четное: $\frac{1}{3}\cdot\frac{(n-k)^2}{(2n+k)(n+2k)}\cdot abc\cdot\frac{\left(\frac{a}{p}\right)^\lambda+\left(\frac{b}{q}\right)^\lambda}{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}},\ \lambda=\frac{n+2k}{n-k}$,

k нечетн.: $\frac{1}{3}\cdot\frac{(n-k)^2}{(2n+k)(n+2k)}\cdot abc.\frac{\left(\frac{a}{p}\right)^\lambda}{\frac{a}{p}+\frac{b}{q}}$, λ то же.

530. $\frac{1}{3(n-1)(n-2)}\cdot\frac{abc^{n-2}}{h^{n-3}}$. **531.** $\frac{(n-k)^2}{3(2n+k)(n+2k)}\cdot abc.\left(\frac{c}{h}\right)^{\frac{3k}{n-k}}$.

532. $\frac{1}{3}\frac{[1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)]^3}{1\cdot2\cdot3\cdots(3n-1)}\cdot\frac{(abc)^n}{h^{3n-3}}$. **533.** $\frac{1}{3}abc$. **534.** $\frac{\pi}{6}ch\sqrt{ab}$.

535. $\frac{1}{3\pi}abc$. **536.** $\frac{1}{3e}abc$. **537.** $\frac{1}{12}abc$.

538—542. В этих задачах вводятся координ. $x = a\rho \sin^3\theta \cos^3\psi$, $y = b\rho \sin^3\theta \sin^3\psi$, $z = c\rho \cos^3\theta$. **538.** $\frac{3}{4}\pi abc\ [f(\beta) - f(\alpha)]$, $f(\theta) = \frac{1}{3}\cos^3\theta - \frac{2}{5}\cos^5\theta + \frac{1}{7}\cos^7\theta$, $\alpha > \beta$. **539.** $\frac{1}{1680} \cdot \frac{(abc)^2}{h^3}$. **540.** $\frac{\pi}{448} \cdot \frac{abc^4}{h^3}$. **541.** $\frac{21\pi^2}{1024}abc$. **542.** $\frac{\pi}{80} \cdot \frac{abc^2}{h}$.

543—545. Ввести координ.: $x = a\rho \sin^4\theta \cos^4\psi$, $y = b\rho \sin^4\theta \sin^4\psi$, $z = c\rho\cos^4\theta$. **543.** $\frac{1}{18}abc$. **544.** $\frac{1}{270}abc\left(\sqrt{\frac{a}{k}} + \sqrt{\frac{b}{k}}\right)$. **545.** $\frac{1}{630} \cdot \frac{abc^2}{h}$. **546.** Относ. OZ: $\frac{1}{3}M(a^2 + b^2)$. **547.** $\frac{3}{10}MR^2$ (цилиндр. коорд.). **548.** $\frac{2}{5}\sin^2\frac{\alpha}{2}(2 + \cos\alpha)MR^2$(цилиндр.коорд.). **549.** $\frac{27}{140}Ma^2$ (сферич. коорд.). **550.** Относ. OZ: $\frac{1}{5}M(a^2 + b^2)$ (коорд. $x = a\rho\sin\theta\cos\psi$ и пр.). **551.** $\frac{1}{10}M(a^2 + b^2)$ (коорд. $x = a\rho\sin^2\theta\cos^2\psi$ и пр.). **552.** $\frac{7}{143}M(a^2 + b^2)$ (координ. $x = a\rho\sin^3\theta\cos^3\psi$ и пр.). **553.** $\left(\frac{3}{5}a, \frac{3}{5}b, \frac{9}{32}\sqrt{ab}\right)$ (прямоуг. коорд.). **554.** $\left(\frac{1}{3}a, \frac{1}{3}b, \frac{2}{9}c\right)$ (Прямоуг. коорд.). **555.** $\left(0, 0, \frac{3}{4}c\right)$(Цилиндр. коорд.). **556.** $\left(0, 0, \frac{1}{2}a\right)$ (Цил. коорд.). **557.** $\left(0, 0, \frac{2}{3}a\right)$(Цил. коорд.). **558.** $\left(0, 0, \frac{3}{8}R(1 + \cos\alpha)\right)$(Цил. к.). **559.** $x_c = y_c = z_c = \frac{9\pi}{448}a$ (Сферич. коорд.). **560.** $\left(0, 0, \frac{9}{20}a\right)$ (Сферич. коорд.). **561.** $\left(0, 0, \frac{5(6\sqrt{3} + 5)}{83}c\right)$ (Координаты $x = a\rho\cos\varphi$, $y = b\rho\sin\varphi$, z). **562.** $\left(0, 0, \frac{3}{16}(2 + \sqrt{2})c\right)$ (Координаты $x = a\rho\sin\theta\cos\psi$ и пр.). **563.** $\left(\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}b, \frac{1}{4}c\right)$(Коорд. $x = a\rho\sin^2\theta\cos^2\psi$ и пр.). **564.** $\left(0, 0, \frac{7}{30}c\right)$ (см. 563). **565.** $\left(\frac{21}{128}a, \frac{21}{128}b, \frac{21}{128}c\right)$(Коорд. $x = a\rho\sin^3\theta\cos^3\psi$ и пр.).

566. $\left(\frac{3}{28}a, \frac{3}{28}b, \frac{3}{28}c\right)$ (Координаты $x = a\rho\sin^4\theta\cos^4\psi$ и пр.).

567. $\frac{\pi}{384}(8a^4 + 3b^4 + 3c^4 + 4a^2b^2 + 4a^2c^2 + 2b^2c^2)$ (Сфер. координ.).

568. $\frac{1}{4}(a - a_1)(b - b_1)(c - c_1)$. **569.** Легко доказывается из геометрических соображений (элемент об'ема прямоугольный параллелепипед, элемент поверхности — кривол. прямоугольник).

570. $\frac{\pi a^3}{4u_0^2}\left\{\frac{v_0}{u_0^2 + v_0^2} + \frac{1}{u_0}\operatorname{arctg}\frac{v_0}{u_0}\right\}$, $\frac{\pi a^2}{u_0}\left\{\frac{v_0}{u_0^2 + v_0^2} + \frac{1}{u_0}\operatorname{arctg}\frac{v_0}{u_0}\right\}$

(Координатные поверхности $u = u_0 : (x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{a^2}{u_0^2}(x^2 + y^2)$, $v_0 = v_0 : x^2 + y^2 + z^2 + \frac{az}{v_0} = 0$, $\psi = \psi_0 : y = x\operatorname{tg}\psi_0$).

571. $\frac{2\pi a^3}{3}\Big[(1 - \cos u_0)(\operatorname{ch}^3 v_0 - 3\operatorname{ch} v_0 + 2) + (\operatorname{ch} v_0 - 1)(\cos^3 u_0 - 3\cos u_0 + 2)\Big]$, $\pi a^2 \operatorname{sh} v_0 \Big[\operatorname{sh} v_0 - \cos u_0\sqrt{\operatorname{ch}^2 v_0 - \cos^2 u_0} + \operatorname{ch}^2 v_0 \arcsin\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 v_0 - \cos^2 u_0} - \operatorname{sh} v_0\cos u_0}{\operatorname{ch}^2 v_0}\Big]$. (Координ пов-сти: $u = u_0 : -\frac{x^2 + y^2}{a^2\sin^2 u_0} + \frac{z^2}{a^2\cos^2 u_0} = 1$, $v = v_0 : \frac{x^2 + y^2}{a^2\operatorname{sh}^2 v_0} + \frac{z^2}{a^2\operatorname{ch}^2 v_0} = 1$, $\psi = \psi_0 : y = x\operatorname{tg}\psi_0$). **572.** $\frac{\pi a^3}{\operatorname{sh}^2 u_0}\Big[\frac{\sin v_0}{\operatorname{ch} u_0 - \cos v_0} + 2\coth u_0 \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{v_0}{2}\operatorname{th}\frac{u_0}{2}\right)\Big]$, $\frac{2\pi a^2}{\operatorname{sh} u_0}\Big[\frac{\sin v_0}{\operatorname{ch} u_0 - \cos v_0} + 2\coth u_0 \cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{v_0}{2}\operatorname{th}\frac{u_0}{2}\right)\Big]$. (Координ. пов-сти: $u = u_0 : (x^2 + y^2 + z^2 + a^2)^2 = 4a^2\coth^2 u_0\,(x^2 + y^2)$, $v = v_0 : x^2 + y^2 + (z + a\cot v_0)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 v_0}$, $y = x\operatorname{tg}\psi_0$).

573. При $z > R : \frac{M}{z}\left[\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{3/2} - \left(\frac{z}{R}\right)^3 - \frac{3}{2}\frac{z}{R} + 1\right]$ (M масса полусферы). При $z < R : \frac{M_1}{z}\left[\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{3/2} - \left(\frac{R}{z}\right)^3 + \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{R}{z}\right)^2 - 2\right]$

$\left(M_1 = \frac{2}{3}\pi z^3\gamma\right)$. **574**. При $z > R: \frac{4\pi k}{15z^2}\left[(R^2+z^2)^{5/2} - z^5 - \frac{5}{2}R^2z^3\right] =$
$= \frac{8M}{15R}\left[\frac{5\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{R}{z} + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6}\left(\frac{R}{z}\right)^3 - \frac{5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\left(\frac{R}{z}\right)^5 \cdots\right]$, M масса сферы. **575**. При $z > R: \frac{M}{R}\left[\frac{R}{z} + \frac{2}{7}\left(\frac{R}{z}\right)^3\right]$, M масса сферы.

576. Потенциальная функция в точке, отстоящей от центра сферы на расстояние ρ (независимо от углов θ и ψ) равна $\frac{M}{\rho}$ при $\rho > R$ (M масса сферы) и равна $\frac{4\pi}{\rho}\int_0^\rho f(\rho)\rho^2 d\rho + 4\pi\int_\rho^R f(\rho)\rho\, d\rho$ при $\rho < R$.

577. При $z > a: \frac{3M}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{1}{1\cdot 3}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z} + \frac{1}{3\cdot 5}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^3 + \right.$
$\left. + \frac{1}{5\cdot 7}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^5 + \cdots\right]$ (M масса эллипсоида. **587**. При $z > b$ и $z > \sqrt{a^2-b^2}: \frac{3M}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{1}{1\cdot 3}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z} - \frac{1}{3\cdot 5}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^3 + \right.$
$\left. + \frac{1}{5\cdot 7}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right)^5 - \cdots\right]$. ($M$ масса эллипсоида).

ОТДЕЛ V.

Интегрирование дифференциальных уравнений.

1—7. Полные дифференциалы.

1. $\sqrt{x^2+y^2} + \lg xy + \frac{x}{y} = C$. **2.** $x^4 + x^2y^2 + y^4 = C$.

3. $x^2 + 2y^2 - xy = C$. **4.** $x^3y + x^2 - y^2 = Cxy$.

5. $x^3 + y^3 - x^2 - xy + y^2 = C$. **6.** $y\sqrt{1+x^2} + x^2y - y\lg x = C$.

7. $x\sin y - y\cos x + \lg xy = C$.

8—13. Уравнения с отделенными переменными.

8. $y + C = 2x - \frac{1}{2}x^2 + 2\lg(1-x)$. **9**. $x^2 + y^2 + 2Cxy = C^2 - 1$.

10. $x + y = C(1 - xy)$. **11**. $(x+y)(x-y-2) + 2\lg\left(\frac{1+x}{1-y}\right) = C$.

12. $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = C$. **13**. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C$.

14—21. Уравнения Эйлера: $aydx + bxdy + x^m y^n(fydx + gxdy) = 0$.

14. $11x + 8y^2 = Cx^{33}y^{24}$. **15**. $7 + 3y = Cx^{21}y^{-6}$. **16**. $1 + x^3 = Cx^{18}y^3$.

17. $5 + 4x^2y = Cx^{12}y^{16}$. **18**. $3 + 2\sqrt{xy} = Cx^5y^2$.

19. $(7 + 12xy)y^{48} = Cx^{36}$. **20**. $x^{22}y^{15}\{15y\sqrt{y} + 11\sqrt{x}\} = C$.

21. $x^8y^3 = 1 + Cx^3y$.

22—34. Уравнения однородные.

22. $y^2 - 3xy + 2x^2 = C$. **28**. $fy^3 + 3cxy^2 + 3bx^2y + ax^3 = C$.

24. $(x+y)(x^3+y^3) = C$. **25**. $(y-x)(y+2x)^{14} = C(y+x)^9$.

26. $(y-x)^8(y-2x)^9 = C(y+2x)^5$. **27**. $(y-x)^5(y-3x)^9 = C(y-2x)^{12}$.

28. $(y+x)^6(y-2x)^3 = C(y-x)^2(y+2x)$. **29**. $y(y+2x)^3 = C(y^2-x^2)$.

30. $ax^4 + 4bx^3y + 2cx^2y^2 + 4fxy^3 + gy^4 = C$. **31**. $(x^2+y^2)^3(x+y)^2 = C$.

32. $y^2 = Cxe^{\frac{x^2}{y^2}}$ **33**. $y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cx^3e^{\frac{y}{x^2}(y + \sqrt{y^2 - x^2})}$.

34. $C^2x^2 = 1 + 2Cy$.

35—45. Уравнения, приводимые к однородным.

35. $x + y + 1 = Ce^{\frac{1}{3}(2x+y)}$. **36**. $(x-1)(3x+2y-1) = C$.

37. $x + y - 1 = Ce^{\frac{2x+2}{x+y-1}}$. **38**. $(y - 2x + 3)^3 = C(y - x + 1)^2$.

39. $e^x = C\frac{e^z}{1-e^z}$, $z = x - y + 1$. **40**. $\cot(x+y-1) = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}(C - x\sqrt{2})$.

41. $\frac{1}{3}x + \sqrt[3]{z} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{z^2} + \lg(1 - \sqrt[3]{z}) = C$, $z = x - y + 2$.

42. $y^2 + xy - x^2 - x + y = C$. **43**. $2x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 6y = C$.

44. $2x^2+4xy+2y^2+8x-4y+C=9\ \lg\left\{\sqrt{x+y+2}-\sqrt{x+y-1}\right\}$
$+(2x+2y+1)\sqrt{x^2+2xy+y^2+x+y-2}.$

45. $x^2+3xy+3y^2+2x+9y+13=Ce^{-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left\{\frac{\sqrt{3}(x+2y+3)}{x-5}\right\}}.$

46—57. Линейные уравнения.

46. $y=C\sqrt{x^2+2x-1}+x.$ **47.** $y=C\lg x+x^3.$

48. $y=C\sqrt{a^2-x^2}+x.$ **49.** $y=C(2x-1)+\frac{1}{x}\cdot$ **50.** $y=C\sqrt{x}+x^2$

51. $y=C(3x^2-2x)+\frac{2}{x}\cdot$ **52.** $y=C\frac{\sin x}{x}+\cos x.$ **53.** $y=Cxe^x+x^2.$

54. $y=\frac{Cx}{x^3+1}+\frac{1}{x}\cdot$ **55.** $y=Cx\lg x+\sqrt{x}.$ **56.** $y=\frac{Cx}{x-1}+x^2.$

57. $y=Cx-x^2.$

58—68. Уравнения Бернулли.

58. $x^2+y^2-a^2=Cy.$ **59.** $y^3=Cx^3+x^3.$

60. $y^4=C\sqrt{x}+\sqrt{x+1}.$ **61.** $\frac{1}{y^2}=C\sin x+x.$ **62.** $\frac{1}{y}=Ce^{x^2}+\frac{1}{x}.$

63. $\frac{1}{y^3}=C(x^2+x)+\sqrt{x}.$ **64.** $y^3=Cx^3+x^4.$ **65.** $y^2=Cx^2+x^4.$

66. $\frac{1}{y}=C\sqrt{x^2+x+1}-\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\cdot$ **67.** $y^3=\frac{Cx}{x^2-a^2}+x^2.$

68. $\frac{1}{y^2}=\frac{C}{\sqrt{x^2+a^2}}+x^2.$

69—74. Уравнения вида: $f(x,y)\,dx+\varphi\,(x,y)\,dy=\psi\,(x,y)\,(xdy-ydx)$, где f и φ однородные функции одной и той же степени, ψ—однородная функция той же или иной степени. **69.** $x(x^2+y^2)^2=$ $=Cx^3+2x^2y+\frac{2}{3}y^3.$ **70.** $x^2-y^2-2\frac{y}{x}=C.$ **71.** $y\,(1-x)=C\,(y+x).$ **72.** $(1-x)\,(x+y)=Cx.$ **73.** $(x^2-y)^2=C\,(x^2+y^2).$ **74.** $2x=$ $=\frac{Cx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{x}+\lg\left(\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right)\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

75—93. Уравнения 1-го порядка и высших степеней относительно y', не содержащие одной из переменных: x или y. **75.** $(3y+$ $+C)^2=(x^2-1)^3.$ **76.** $x=\lg p+\sin p,\ y+C=p\,(1+\sin p)+\cos p.$

77. $x=p+\arcsin p,\ y+C=\frac{1}{2}p^2-\sqrt{1-p^2}$. **78**. $x=p^2+e^p$, $y+C=\frac{2}{3}p^3+e^p\,(p-1)$. **79**. $x=p+\sin p,\ y+C=\frac{1}{2}p^2+$ $+p\sin p+\cos p$. **80**. $x=2p+\log p,\ y+C=\left(p+\frac{1}{2}\right)^2$.

81. $x=p^2-2p+1,\ y+C=\frac{2}{3}p^3-p^2$.

82. $x=\frac{t}{1+t^2},\ y+C=\frac{t(1+3t^2)}{4(1+t^2)^2}-\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} t$

83. $x+C=\frac{1}{2}\lg\left(y+\sqrt[3]{1-y^3}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\sqrt[3]{1-y^3}-y}{y\sqrt{3}}\right)$.

84. $4x+C=\lg\left(\frac{\sqrt[4]{y^4+1}+y}{\sqrt[4]{y^4+1}-y}\right)-2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt[4]{y^4+1}}{y}\right)$.

85. $x+C=2\operatorname{arc\,tg} p-\lg\left(\frac{1+\sqrt{1-p^2}}{p}\right),\ y=\arcsin p+\lg(1+p^2)$.

86. $x+C=\frac{1}{2p^2}+e^p(p+1),\ y=\frac{1}{p}+p^2e^p$.

87. $x+C=\lg p+\sin p+p\cos p,\ y=p+p^2\cos p$.

88. $x+C=a(2\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha),\ y=a(\operatorname{tg}^2\alpha+\cos\alpha),\ \operatorname{tg}\alpha=y'$.

89. $y=\frac{1}{2}\frac{1+p}{\sqrt{p}},\ 2x+C=\frac{1-3p}{3p\sqrt{p}}$. **90**. $x+C=2p+3p^2,\ y=p^2+2p^3$.

91. $x+C=-\frac{1}{t}+\lg\left(\frac{1+t}{\sqrt{1-t+t^2}}\right)-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right), y=\frac{t}{1+t^3}$.

92. $x+C=\lg\left(\frac{1+t}{1-t}\right)-2\operatorname{arc\,tg} t-\frac{2}{t},\ y=\frac{t^2}{1-t^4}$.

93. $2x+C=\lg\frac{t^5}{(t^2-1)^2\ (t-2)},\ y=\frac{t+1}{t^2-3t+2}$.

94 — 136. Уравнения 1-го порядка и высших степеней относительно y', решаемые относительно y' или y, или x.

94. $y\,(y+x^2)-C\,(y+xy+x^3)+C^2x=0$.

95. $y^2-C\left(e^x+e^{\frac{1}{2}x^2}\right)y+C^2e^{x\left(1+\frac{1}{2}x\right)}=0$.

96. $y(y^2-x^2)-C(y+xy^2-x^3)+C^2x=0.$

97. $\frac{1}{x}=C.\ \frac{\cot^k\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+k\cos\alpha},\ =\frac{k\sin\alpha}{1+k\cos\alpha}.x.$

98. Особ. реш. $4xy=a^2$. **99.** Особ. реш. $y^2=2ax$.

100. Особ. реш. $4y^3=27ax^2$. **101.** Особ. реш. $x^{\frac{4}{5}}+y^{\frac{4}{5}}=a^{\frac{4}{5}}$.

102. Особ. реш. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ или $(x+y-a)^2=4xy$.

103. Особ. реш. $x^2+y^2=2ax$. **104.** Особ. реш. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

105. Особ. реш. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$. **106.** Особ. реш. $x^2+4y=0$.

107. Особ. реш. $x^2+y^2=a^2$ **108.** $\sin\left(\frac{x-y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=Ce^{-\frac{x+y}{2}}$

109. $e^{-2x}-2e^{-y}=C$. **110.** $x+C=\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y-x}{2}\right)$.

111. $x=3\sqrt{p}+\frac{C\sqrt{p}}{\sqrt[3]{p\sqrt{p}-1}},\ y=3+p\sqrt{p}+\frac{C}{\sqrt[3]{p\sqrt{p}-1}}.$

112. $x=\frac{C}{p^2}-\frac{1}{p},\ y=\frac{2C}{p}+\lg p-2.$ **113.** $x=\frac{C}{p^3}-\frac{2k}{k+2}p^{k-1},$
$y=\frac{3C}{2p^2}-\frac{2(k-1)}{k+2}p^k.$ **114.** $x=\frac{C}{p^3}+\frac{4}{p^3}\lg p,\ y=\frac{1}{p^2}(1+6\log p)+\frac{3C}{2p^2}.$

115. $x=\frac{C}{p^2}-\frac{\cos p}{p^2}-\frac{\sin p}{p},\ y=\frac{2C}{p}-\frac{2\cos p}{p}-\sin p.$

116. $x=\cot^2\alpha(C+\lg\cos\alpha),\ y=\alpha+2\cot\alpha\,(C+\lg\cos\alpha),\ \mathrm{tg}\alpha=y'.$

117. $x=\frac{1}{\sin^2 t}(C+\cos t),\ y=t+\frac{2}{\sin t}(C+\cos t),\ \sin t=y'.$

118. $x=\frac{C}{p^3}-2e^p\left(\frac{1}{p}-\frac{2}{p^2}+\frac{2}{p^3}\right),\ y=\frac{3C}{2p^2}-2e^p\left(1-\frac{3}{p}+\frac{3}{p^2}\right).$

119. $x=C\cot^3\alpha-\frac{2}{\sin\alpha}+\frac{4}{3\sin^3\alpha},\ y=\frac{3C}{2}\cot^2\alpha-\frac{2}{\cos\alpha}+$
$+\frac{2}{\sin^2\alpha\cos\alpha},\ \mathrm{tg}\alpha=y'.$ **120.** $x=\frac{1}{p^2}\left(C+\log(1+p)\right)-\frac{1}{p},$
$y=2\left(\frac{C}{p}-1\right)+\left(\frac{2}{p}+1\right)\lg(1+p).$ **121.** $x=C\cot^2\alpha-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha},$
$y=2C\cot\alpha-\frac{2}{\sin\alpha}+\lg\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right),\ \mathrm{tg}\,\alpha=y'.$

122. $x = \frac{1}{(1-p)^2}\left[C + \frac{3}{2}p^2 - p^3\right]$, $y = \frac{1}{(1-p)^2}\left[Cp^2 + p^3 - \frac{1}{2}p^4\right]$; $y = 0$ — особ. реш.

123. $x = \frac{C}{\sqrt[8]{t^3(t-2)^5}}$, $y = x^2\left(t^2 - \frac{3}{2}t\right)$.

124. $x = \frac{C}{\sqrt[3]{(t-1)^2(t+3)}}$, $y = x^2\left(\frac{1}{2}t^2 + t - 1\right)$.

125. $x = \frac{C}{\sqrt[8]{(t-1)^5(t+1)^3}}$, $y = x^2\left(t^2 + \frac{1}{2}t - 1\right)$.

126. $x = \frac{C}{\sqrt[12]{(t-1)^7(2t+1)^{10}}}$, $y = x^2\left(2t^2 - \frac{1}{2}t - 1\right)$.

127. $x = C\frac{t\sqrt[4]{t-2}}{\sqrt[20]{(3t+2)^9(t-1)^{16}}}$, $y = x^2\left(\frac{7}{6} - \frac{2}{3t^2}\right)$.

128. $x = \frac{C(t-1)}{(t-2)^2}$, $y = \frac{1}{6}x^2(t+2)$.

129. $x = C\left(\frac{2t+1+\sqrt{3}}{2t+1-\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{4\sqrt{3}}}\frac{1}{(2t^2+2t-1)^{3/4}}$, $y = x^2(t^2+t^3)$.

130. $x = Cy - y^2$. **131.** $x = \frac{y}{q} + q$, $y = \frac{Cq}{\sqrt{q^2-1}} + \frac{q}{\sqrt{q^2-1}}\log(q + \sqrt{q^2-1})$. **132.** $x = y^2\left(2t^2 - \frac{1}{2}t - 1\right)$, $y = \frac{C}{\sqrt[12]{(t-1)^7(2t+1)^{10}}}$. **133.** $x = y^2\left(t^2 - \frac{3}{2}t\right)$, $y = \frac{C}{\sqrt[8]{t^3(t-2)^5}}$.

134. $x = y^2\left(\frac{1}{2}t^2 - 1\right)$, $y = \frac{C}{\sqrt[3]{(t-2)^2(t+1)}}$.

135. $x = y^2\left(t^2 + \frac{1}{2}t - 1\right)$, $y = \frac{C}{\sqrt[8]{(t-1)^5(t+1)^3}}$.

136. $x = y^2\left(\frac{1}{2}t^2 + t - 1\right)$, $y = \frac{C}{\sqrt[3]{(t-1)^2(t+2)}}$.

137—145. Уравнения высшего порядка, содержащие $y^{(n-1)}$ и $y^{(n)}$.

137. $y+C_2=\frac{6}{5}(x+C_1)+\frac{5}{12}(x+C_1)^3$ (решить относ. y'').

138. $x+C_1=\frac{1}{2}\lg t+\frac{3}{4t^2}$, $y+C_2=\frac{1}{4}t+\frac{3}{4t^3}$, $t=y''$ (уравнение дает $y'=z$, как функцию от t, после чего находим $dx=\frac{dz}{t}$, $dy=zdx$).

139. $(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=1$ (решить относ. y'').

140. $y+C_2=\lg \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+C_1\right)$ (см. 139). **141.** $y=C_3+C_2x-\sin(x+C_1)$ (решить относ. y''').

142. $y=C_3+C_2x+\frac{1}{2}\left(C_1-\frac{1}{3}\right)x^2+\frac{1}{6}x^3\pm\frac{8}{105}(C_1+x)^{7/2}$, (реш. отн. y'').

143. $x+C_2=z(2\lg z-1)$, $y+C_1=z^2\lg z$, $z=y'$.

144. $x+C_2=e^z(z+1)$, $y+C_1=z^2e^z$, $z=y'$.

145. $x+C_2=2z-\lg(1+z)+\frac{1}{1+z}$, $y+C_1=\frac{z^3}{1+z}$, $z=y'$.

146—149. Уравнения, содержащие y и y''.

146. $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2$. **147.** $C_1\sqrt{C_1}\,x+C_2=\sqrt{C_1y\,(C_1y-1)}+\lg\{\sqrt{C_1y}+\sqrt{C_1y-1}\}$. **148.** $3x+C_2=4\sqrt{C_1+\sqrt{y}}\cdot\left(\sqrt{y}-2C_1\right)$.

149. $\frac{2}{3}x+C_2=C_1\lg\left\{\sqrt{C_1+\sqrt[3]{y^2}}+\sqrt[3]{y}\right\}-\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt{C_1+\sqrt[3]{y^2}}$.

150—157. Уравнения, не содержащие $y, y', y'', \cdots y^{(k-1)}$.

150. $y=\frac{1}{12}x^4+C_1x^3+C_2x+C_3$. **151.** $y=-2x+C_1+C_2e^{2x^2}$.

152. $y=C_2+\frac{3}{7}(x+C_1)^{7/3}-\frac{3}{4}C_1(x+C_1)^{4/3}$.

153. $y=C_2-\frac{1}{2}\sqrt{1-C_1{}^2}\cdot x^2+\frac{1}{2}C_1x\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}C_1\arcsin x$.

154. $y=C_1x^4-\frac{1}{96C_1}x^2+C_2x+C_3$. **155.** $y=C_3+C_2x+C_1\lg x-\frac{1}{2x}$.

156. $y=\frac{1}{2}x\lg x+C_1\lg(x-1)+C_2x+C_3$.

157. $y=C_3+C_2x+\frac{4}{15C_1{}^3}(1+C_1x)^{3/2}(C_1x-4)$.

158—182. Уравнения, не содержащие x.

158. $C_1x+C_2=\lg\left(\frac{y}{y+C_1}\right)$.

159. $x\sqrt{C_1}+C_2=\lg\frac{\sqrt{y^2+C_1}-\sqrt{C_1}}{y}$ или $x\sqrt{C_1}+C_2=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{y^2+C_1}{C_1}}$.

160. $(x+C_2)^2-y^2=C_1$.

161. $x+C_2=y^3+C_1y$.

162. $x+C_2=\lg\sin(y+C_1)$.

163. $x+C_2=C_1e^{-y}$.

164. $C_1x+C_2=\lg(C_1y-1)$.

165. $C_1y=1+({}^1/{}_2C_1x+C_2)^2$.

166. $C_1y=1+\left(\frac{2}{3}C_1x+C_2\right)^{3/2}$.

167. $x+C_3=\int\frac{dy}{C_1+C_2y+\frac{1}{2}ay^2}$.

168. $1+y=C_2e^{C_1x}$.

169. $x+C_1y+C_2=(1+C_1^2)\lg(C_1+y)$.

170. $x+C_3=\frac{1}{C_2}y+\frac{1}{2C_2^2}\lg(C_2y^2-y+C_1)+\frac{1-2C_1C_2}{2C_2^2}\int\frac{dy}{C_2y^2-y+C_1}$.

171. $4x+C_2=\lg\left\{\frac{\sqrt[4]{C_1+y^4}+y}{\sqrt[4]{C_1+y^4}-y}\right\}-2\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\sqrt[4]{C_1+y^4}}{y}\right]$.

172. $x+C_2=\frac{1}{2}y^2-C_1y+(C_1^2+1)\lg(y+C_1)$.

173. $x+C_2=C_1\arcsin y+\sqrt{1-C_1^2}\lg\{y\sqrt{1-C_1^2}+C_1\sqrt{1-y^2}\}$.

174. $y=C_1\cdot\coth\left(\frac{x}{2}+C_2\right)$.

175. $(C_1y)^2=1+C_2e^{C_1x}$.

176. $C_1^2x+C_2=\frac{1}{2}C_1y^2+y+\frac{1}{C_1}\lg(C_1y-1)$.

177. $\operatorname{th}\left(\frac{1}{2}y+C_2\right)=C_3e^{C_1x}$.

178. $x+C_2=2C_1z+\frac{3}{2}z^2, y=C_1z^2+z^3$, $z=y'$; уравнение определяет y, как функцию от z, затем x из формулы $dx=\frac{dy}{z}$.

179. $x+C_2=C_1\lg z-\frac{1}{z}$, $y=C_1z+\log z$, $z=y'$ (см. 178).

180. $x+C_2=C_1\lg z+\frac{3}{2}z^2$, $y=C_1z+z^3$, $z=y'$ (см. 178).

181. $x+C_2=2C_1z-\cos z+z\sin z,\ y=z^2(C_1+\sin z),\ z=y'$ (см. 178).

182. $x=C_1+C_2y+C_3y^2+\iiint\varphi(y)\,dy^3$ (принять y за независимую переменную и x за ее неизвестную функцию).

183—202. Уравнения однородные относительно y и ее производных.

183. $y=C_2e^{x^{\frac{3}{2}}\left(C_1+x^{\frac{3}{2}}\right)}$. **184**. $y=C_2xe^{C_1(x^2-x)}$.

185. $y=C_2x^2e^{C_1(x^3-x^2)}$. **186**. $y=C_2x^3e^{C_1x^2}$.

187. $y=C_2e^{\frac{3}{28}(x+C_1)^{\frac{4}{3}}(4x-3C_1)}$. **188**. $y=C_2e^{\frac{1}{3}(x^2+C_1)^{\frac{3}{2}}}$.

189. $y^2=C_2+C_1x$. **190**. $y=C_2e^{C_1\cos x}$. **191**. $y=C_2e^{C_1x^3}$.

192. $y=C_2e^{C_1(x^3-x)}$. **193**. $y=C_2\dfrac{e^{C_1x}}{(x+C_1)^{1+C_1^2}}$.

194. $y=C_3e^{x\left\{\frac{1}{2}\lg^2x+C_1\lg x+C_2\right\}}$.

195. $y=C_2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{C_1}.e^{C_1x\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

196. $y=\dfrac{C_2e^{-x}}{(C_1-x)^{C_1}}$. **197**. $y=C_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).e^{-\frac{1}{x}\left(C_1+\sqrt{x^2+1}\right)}$.

198. $y=C_2e^{-\cos(x+C_1)}$. **199**. $y=C_2\dfrac{e^{C_1x}}{(x+C_1+1)^{C_1^2}}$.

200. $y=C_2e^{\frac{1}{12}C_1x^3-\frac{1}{C_1}x}$. **201**. $y=C_3e^{C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x}$.

202. $y=C_2(x^2+C_1)^{C_1}$.

203—253. Линейные уравнения.

203. $y=1+C_1x+C_2\sqrt{1+x^2}$. **204**. $y=1+C_1x+\dfrac{C_2}{x+1}$.

205. $y=C_1(2x-1)+\dfrac{C_2}{x}+x^2$. **206**. $y=x+C_1\cos(e^x)+C_2\sin(e^x)$.

207. $y=\dfrac{1}{x}+C_1e^{\frac{1}{x}}+Ce^{\frac{2}{x}}$. **208**. $y=x^3+C_1x^2+C_2(2x-1)$.

209. $y=x^2+C_1(2x+3)+\dfrac{C_2}{x}$. **210**. $y=\dfrac{C_1}{x}+C_2x+\sin x$.

211. $y=C_1\sin x+C_2x+\frac{1}{x}$. **212.** $y=C_1x+C_2e^x+\frac{1}{x}$.

213. $y=\frac{C_1}{x}+C_2\lg x+x$. **214.** $y=C_1e^{-x}+C_2\sqrt{x}+x$.

215. $y=\operatorname{ch}x\left(C_1-\frac{1}{4}x\right)+\operatorname{sh}x\left(C_2+\frac{1}{4}x^2\right)$.

216. $y=\cos x\left(C_1+\frac{1}{4}x-\frac{1}{6}x^3\right)+\sin x\left(C_2+\frac{1}{4}x^2\right)$.

217. $y=C_1e^{2x}+\left(C_2-x-\frac{1}{2}x^2\right)e^x$.

218. $y=C_1e^x+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_3\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$.

219. $y=-1-3x-x^2+C_1e^x+C_2\cos x+C_3\sin x$.

220. $y=C_1+C_2x-\frac{1}{2}x^2+C_3\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x\,(C_4+x)$.

221. $y=\frac{3}{16}x+\frac{1}{16}+e^{x\sqrt{2}}(C_1\cos x\sqrt{2}+C_2\sin x\sqrt{2})+$
$+e^{-x\sqrt{2}}(C_3\cos x\sqrt{2}+C_4\sin x\sqrt{2})$.

222. $y=\frac{1}{4}\cos x+(C_1+C_2x).e^x+(C_3+C_4x).e^{-x}$.

223. $y=e^{-x}(0{,}04x+0{,}032)+\frac{1}{289}e^x(15\sin 2x+8\cos 2x)+$
$+\cos 2x\,.\,(C_1+C_2x)+\sin 2x\,.\,(C_3+C_4x)$.

224. $y=\left(\frac{1}{48}x^2+C_1x+C_2\right)e^{2x}+C_3\sin 2x+\left(C_4-\frac{1}{32}x\right)\cos 2x$.

225. $y=e^{-x}\left(C_1+C_2x+\frac{1}{4}x^2\right)+e^{-\frac{x}{2}}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+$
$+\frac{1}{637}\left(368\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}+96\sqrt{3}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$.

226. $y=\left(\frac{1}{64}x-\frac{1}{128}\right)e^x+\frac{1}{36}\sin x+$
$+(C_1+C_2x)\cdot\sin(x\sqrt{7})+(C_3+C_4x)\cdot\cos(x\sqrt{7})$.

227. $y=e^{-2x}\left(C_1+C_2x+\frac{1}{8}x^2\right)+\left(C_3+\frac{1}{32}x\right)\sin 2x+C_4\cos 2x$.

228. $y=(0{,}01\,x-0{,}008)\,e^{2x}+\dfrac{1}{625}e^{-x}(23\sin x\sqrt{6}-4\sqrt{6}\cos x\sqrt{6})+$
$+(C_1+C_2x)\cdot\cos x\sqrt{6}+(C_3+C_4x)\cdot\sin x\sqrt{6}.$

229. $y=\left(\dfrac{1}{8}x-\dfrac{1}{4}\right)e^{x}+(C_1+C_2x)\,e^{-x}+\left(C_3-\dfrac{1}{8}x\right)\cos x+C_4\sin x.$

230. $y=\left(\dfrac{1}{120}x^5+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4\right)e^{-x}-\dfrac{1}{625}(21\cos 2x+$
$+72\sin 2x).$

231. $y=\dfrac{1}{24}x^3+C_1x^2+C_2x+C_3+\left(\dfrac{3}{32}x+C_4\right)\sin 2x+C_5\cos 2x.$

232. $y=\dfrac{1}{24}x^4+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4+\left(\dfrac{1}{2}x^2-4x+C_5\right)e^{x}.$

233. $y=x+C_1\cos x+C_2\sin x+e^{\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(C_3\cos\dfrac{x}{2}+C_4\sin\dfrac{x}{2}\right)+$
$+e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}x}\left(C_5\cos\dfrac{x}{2}+C_6\sin\dfrac{x}{2}\right).$

234. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\left(\dfrac{1}{4}\cos 2x\cdot\lg\cos 2x+\dfrac{1}{2}x\sin 2x\right).$

235. $y=C_1e^{x}+C_2+(e^{x}+1)\lg(1+e^{-x}).$ **236**. $y=C_1(\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x)+$
$+C_2+\lg\operatorname{th}\dfrac{x}{2}+(\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x)\cdot(x+\lg\operatorname{sh}x).$ **237**. $y=\dfrac{1}{x}+C_1e^{x}+$
$+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}.$ **238**. $y=\dfrac{1}{\sin x}+C_1\sin x+C_2\cos x+C_3e^{-x}.$

239. $y=C_1\cos(2x+3y)+C_2\sin(2x+3y)$ (ввести новую независ. перем. $u=2x+3y$). **240**. $y=\dfrac{x}{2}+C_1\operatorname{ch}\dfrac{2}{x}+C_2\operatorname{sh}\dfrac{2}{x}$ (ввести незав. перем. $u=\dfrac{1}{x}$). **241**. $y=x\left\{C_1\operatorname{ch}\dfrac{c}{x}+C_2\operatorname{sh}\dfrac{c}{x}\right\}$ (ввести новую независ. переменную u и новую функцию v уравнениями $u=\dfrac{1}{x},\ v=\dfrac{y}{x}$).

242. $y=C_1+C_2\lg x.$ **243**. $y=C_1\cos\lg x+C_2\sin\lg x+x.$

244. $y=(2x+1)\left\{C_1+C_2\lg(2x+1)\right\}+x.$

245. $y = \frac{C_1}{x-4} + C_2 (x-4)^{5+\sqrt{15}} + C_3 (x-4)^{5-\sqrt{15}} +$
$+ (x-4)^2 \left\{\frac{2}{27} - \frac{1}{18} \lg (x-4)\right\}$. **246.** $y = \frac{C_1}{2x+3} +$
$+ \sqrt{2x+3} \left\{C_2 \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \lg (2x+3)\right] + C_3 \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \lg (2x+3)\right]\right\} +$
$+ \frac{1}{16}\left\{\sin \lg (2x+3) + \cos \lg (2x+3)\right\}$. **247.** $y = (x+1) \left\{C_1 +\right.$
$\left. + C_2 \lg (x+1) - \frac{1}{18} \lg^2 (x+1) - \frac{1}{18} \lg^3 (x+1)\right\} + C_3 (x+1)^4$.

248. $y = \frac{1}{2x-1}\left\{C_1 + \frac{1}{24} \lg (2x-1) + \frac{1}{48} \lg^2 (2x-1)\right\} +$
$+ \sqrt{2x-1}\left\{C_2 \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \lg (2x-1)\right] + C_3 \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \lg (2x-1)\right]\right\}$.

249. $y = 2 + \frac{1}{x} \left\{C_1 + \frac{1}{5} \lg x + \frac{1}{10} \lg^2 x\right\} + C_2 x^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + C_3 x^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.

250. $y = \frac{1}{x+2}\left\{C_1 + \frac{1}{3} \lg (x+2) + \frac{1}{6} \lg^2 (x+2)\right\} +$
$+ \sqrt{x+2} \left\{C_2 \cos\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \lg (x+2)\right] + C_3 \sin\left[\frac{\sqrt{3}}{2} \lg (x+2)\right]\right\}$.

251. $y = C_1 x + C_2 x^2 + e^x$ **252.** $y = \frac{C_1}{x} + C_2 x + \sin x$.

253. $y = C_1 \sqrt{x} + \frac{C_2}{\sqrt{x}} + \operatorname{tg} x$.

254. $x = t + C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$.
$y = 1 + C_1 \sin 2t - C_2 \cos 2t$.

255. $x = t^2 + t + C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$.
$y = t + 1 + 2C_1 e^{2t}$.

256. $x = C_1 + C_2 t + t^2$.
$y = \frac{C_1}{t} + 2C_2 + \sin t$.

257. $x = t - 1 + C_1 e^t \cos t + C_2 e^t \sin t$.
$y = \frac{1}{t} + C_1 e^{-t} \sin t - C_2 e^{-t} \cos t$.

258. $\frac{C_1 x^2 + 2}{\sqrt{C_1 x^2 + 1}} = C_1^2 t + C_2$, $y = \frac{x}{\sqrt{C_1 x^2 + 1}}$.

259. $x = C_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t}\left[C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$,

$y = C_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t}\left[-\frac{1}{2}(C_2 + \sqrt{3}\,C_3)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \right.$
$\left. - \frac{1}{2}(C_3 - \sqrt{3}\,C_2)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$,

$z = C_1 e^t + e^{-\frac{1}{2}t}\left[-\frac{1}{2}(C_2 - \sqrt{3}\,C_3)\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \right.$
$\left. - \frac{1}{2}(C_3 + \sqrt{3}\,C_2)\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]$.

260. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}, y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}, \; z = -(C_1 + C_3)e^{-t} + C_2 e^{2t}$.

261. $x = C_1 + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-2t}$.
$y = \frac{1}{3}C_2 e^{2t} - C_3 e^{-2t}$.
$z = \frac{2}{3}C_2 e^{2t} + 2C_3 e^{-2t}$.

262. $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-2t}$.
$y = \frac{3}{2}C_1 e^{3t} - C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-t}$.
$z = \frac{3}{2}C_1 e^{3t} - C_2 e^{-2t} - C_3 e^{-t}$.

263. $x = C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3$.
$y = \sin t - C_1 t - C_3 t^3$,
$z = \cos t - C_1 t - C_2 t^2$.

264. $x = C_1 + C_2 t + C_3 e^t$.
$y = C_1 - 2C_2 t + C_3 e^t$.
$z = -C_1 - C_2 t + 2C_3 e^t$.

265. $x = C_1 e + C_2 \sin t + C_3 \cos t$.
$y = t - C_1 e^t + C_2 \cos t - C_3 \sin t$.
$z = 1 + C_2 \sin t + C_3 \cos t$.

266. $x = C_1 e^{-2t} + C_2 \sin 4t + C_3 \cos 4t$.
$y = -\frac{1}{4}C_1 e^{-2t} + \frac{1}{2}C_2 \cos 4t - \frac{1}{2}C_3 \sin 4t$.
$z = -\frac{1}{4}C_1 e^{-2t} + C_2 \sin 4t + C_3 \cos 4t$.

267. $x = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t + C_3$.
$y = t + (C_1 + C_2)\cos 2t + (C_1 - C_2)\sin 2t$.
$z = 3 + (C_2 + C_1)\sin 2t + (C_2 - C_1)\cos 2t$.

268. $x = C_1 + C_2 t$.
$y = C_3 t^2 - \frac{3}{4}C_1$.
$z = \frac{5}{4}C_1 - C_2 t + C_3 t^2$.

269. $x = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t}$.
$y = C_1 + C_3 e^{-t}$.
$z = -C_1 - C_2 e^t - 2C_3 e^{-t}$.

270. $x = C_1 e^t + C_2 e^{3t} + C_3 e^{3t}$.
$y = \frac{1}{2}C_1 e^t + \frac{1}{2}C_3 e^{3t}$.
$z = -C_1 e^t - C_2 e^{2t} - \frac{3}{2}C_3 e^{3t}$.

271. $z = C_1 + C_2 t + C_3 e^{2t},\ x = C_2 + 2C_3 e^{2t},\ y = -(C_1 + C_2) - C_2 t + C_3 e^{2t}.$

272. $z = x + y + \Phi(xy),\ z = x + y + \frac{x^2y^2}{a^2} - \frac{xy}{a} + a^2 - a.$

273. $z = xy + \Phi(x^2 + y^2),\ z = xy + x^2 + y^2 - 2a^2 - a\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}.$

274. $z = xy + \Phi(x^2 - y^2),\ z = xy + 1 + (2 - a)\sqrt{a^2 - x^2 + y^2} + 3(a^2 - x^2 + y^2).$

275. $z = x + y + \Phi(x^2 + y^2),\ z = x + y - 1 - \sqrt{x + y^2 - 1} + \frac{1}{2}\lg(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{2 - x^2 - y^2}.$

276. $z = x - y + \Phi\left(\frac{x+1}{y+1}\right).$ **277.** $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + \Phi(x^2 - y^2 - 2xy),$

278. $z = \frac{1}{2}(y - x) + \Phi\left[\frac{y^3(y - 2x)}{y + x}\right].$

279. $z^2 = x^2 - 2y^2 + \Phi[e^{-x}(y^2 + x + 1)].$

280. $v = x + y + z + \Phi(x^2 + y^2,\ yz),\ v = x + y + z - \sqrt{x^2 + y^2 - y^2z^2} - yz - 1 + x^2 + y^2 + yz\sqrt{x^2 + y^2 - y^2z^2}.$

281. $v = \frac{x}{z} + \Phi(xy, xz).\ v = \frac{x}{z} - xz + \frac{1}{x^2z^2} + \frac{z^2}{y^2}.$

282. $v = \frac{xy}{z} + \Phi(x^2 + y^2, y + z),\ v = \frac{xy}{z} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{y + z - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + 2(x^2 + y^2 - 1) + (y + z)^2 - 2(y + z)\sqrt{x^2 + y^2 - 1}.$

283. $v = x^2 + y^2 + z^2 + \Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{x}{z}\right),\ v = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2yz}{x^2} - 1.$

284. $v = \sqrt{x^2 - z^2} + \Phi\left(\frac{x^2}{z}, \frac{y}{z^2}\right), v = \sqrt{x^2 - z^2} - \sqrt{\frac{x^2}{z} - 1} + \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{z^4}.$

285. $v = \sin(xyz) + \Phi\left(x + y + z, \frac{x}{z}\right).$ **286.** $x = \frac{2}{3}y\sqrt{\frac{y}{a}} - \frac{1}{2}\sqrt{ay}.$

287. $x = \frac{1}{3}a + \frac{a^2}{2y} + \frac{y}{6a^2}.$ **288.** $x = \frac{a}{2}\left(\cos\frac{y}{a} + \log\operatorname{tg}\frac{y}{2a}\right).$

289. $y = \frac{1}{3}a + \frac{a^2}{6x} + \frac{x^3}{2a^2}.$ **290.** $y = \frac{1}{4}a \cdot \log\frac{x}{a} - \frac{1}{2}a - \frac{x^2}{2a}.$

291. $r = a\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4} - \theta}.$

292—296. Продиффенцировать предложенное уравнение, заменив y_1 на y, s_1 на s, и ввести $ds = \frac{dy}{\sin\alpha}$, после чего определится y, как функция от α, и затем из формулы $dx = dy \cdot \cot\alpha$ найдется x, как функция от α.

292. $x = x_0 + \frac{1}{4}\left[\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \log \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right],\ y = \frac{a}{2\sin\alpha}$.

293. $x = x_0 + a\left[\log \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\right],\ y = a\sin\alpha$.

294. $x = x_0 + \frac{a}{8}[2\alpha + \sin 2\alpha],\ y = \frac{a}{8}(1 - \cos 2\alpha)$.

295. $\left(y - \frac{4}{9}a\right)^3 = a\ (x - x_0)^2$. **296**. $y = a \operatorname{ch}\frac{x - x_0}{a}$.

297—300. Продифференцировать предложенное уравнение, отбросив значок$_1$, ввести $ds = \frac{1}{\cos\mu}.dr$, $T = \frac{r}{\cos\mu}$, $N = \frac{r}{\sin\mu}$, $S_t = r\operatorname{tg}\mu$, $P_t = r\sin\mu$, после чего определится r, как функция от μ, а затем найдется θ, как функция μ, из уравнения $d\theta = \frac{dr}{r}\operatorname{tg}\mu$ (в ответах μ заменено на u).

297. $r = ae^{m\theta}$.

298. $r = \frac{a\sin u}{\sqrt{\sin u - \cos u}}e^{\frac{1}{2}u}$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}\{u - \lg(\sin u - \cos u)\}.$$

299. $r = a\sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)}.e^{\frac{1+\sin u}{2\cos^2 u}}$

$$\theta = \theta_0 + \frac{1}{3}\left\{\frac{1+\sin u}{\cos^3 u} - \operatorname{tg} u\right\}.$$

300. $r = \frac{a}{\sqrt{1 - \sin u\cos u}}e^{\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\operatorname{tg}u - 1}{\sqrt{3}}\right)}$

$$\theta = \theta_0 - u + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\operatorname{tg}u - 1}{\sqrt{3}}\right).$$

301—307. Имея в виду выражение $Q=\int_{x_0}^{x} y\,dx$, дифференцируем данную формулу и приходим к дифференц. уравнению между x и y.

301. $xy=a(y-a)$. **302**. $y^2=\frac{2}{3}ax$. **303**. $x^2(a^2-y^2)^3=a^8$.

304. $y=b\left(1+e^{2-\frac{x}{a}}\right)$. **305**. $x^2y^2=a^2(x^2+y^2)$. **306**. $y=be^{\frac{x-a}{b}}$.

307. $y=a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$.

308—314. Принимая во внимание выражение $Q=\frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} r^2 d\theta$, продифференцировать предложенное уравнение, что дает дифф. уравнение между r и θ.

308. $r=\frac{a\theta_1}{\theta_1-\theta}$ (θ_1 произв. пост.). **309**. $r^2=a^2\theta$.

310. $r=a\left(1-\sqrt[3]{\frac{\theta_0}{\theta}}\right)$. **311**. $r^2=a^2(e^\theta-1)$. **312**. $r=a\operatorname{tg}\theta$.

313. $r=\frac{a}{6}(\theta-\theta_0)$. **314**. $(\theta_0-\theta)\,r=a$. **315**. $y=Cx^{\frac{k-1}{2}}$.

316. $y(a-x)=b^2$. **317**. $x=a+b\left(\cos\alpha+\log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$, $y=b\sin\alpha$.

318. $y^2=2a(x-b)$. **319**. $x^2+y^2\pm b^2=\frac{2x^3}{3a}$.

320. $x^2+y^2\pm b^2=\frac{4}{3}x\sqrt{ax}$. **321**. $(x^2+y^2)^2=x^4\pm a^4$.

322. $x^4=a^2(x^2+y^2)$. **323**. $x^2+y^2=b^2e^{\frac{2x}{a}}$ **324**. $x^2=2by+b^2$.

325. $y=a\log\frac{x^2+y^2}{b^2}$. **326**. $y^2-xy+x^2=a^2e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2y-x}{x\sqrt{3}}}$.

327. $x^2=2by+b^2+a^2$. **328**. $(x-a)(y-b)=ab$. **329**. $y=b\cos\frac{x}{a}$.

330. $x^2y^2=b^2x^2+a^2y^2$. **331**. $y^2=by-ax$. **332**. $y=b+\frac{ay^2}{2x^2}$.

333. $x=y\cot\log\frac{y}{a}$. **334**. $\frac{y}{x}=b-\frac{x}{a}$. **335**. $y=x\log\frac{a}{x}$.

336. $x+b=a\log\frac{x}{y}$. **337.** $x+b=2a\sqrt{\frac{x}{y}}$. **338.** $\frac{x}{y}=\log\frac{x}{a}$.

339. $(x-b)(y-a)=ab$. **340.** $\frac{x}{y}=\log\frac{y}{a}$. **341.** $y^2=4ax$.

342. $(y-2x)^2=a(y-x)$. **343.** $y^2=4a(x-a)$. **344.** $y^2=4a(x+a)$.

345. $r=ae^{-\theta\sqrt{k^2-1}}$. **346.** $bx=a^2e^{\frac{y^2}{2a^2}}$. **347.** $x^\lambda+y^\lambda=a^\lambda$, $\lambda=\frac{k}{k+1}$

348. $xy=a^2$. **349.** $y=ae^{-\frac{x}{y}}$. **350.** $x^2+y^2=a^2$. **351.** $y^2-x^2=a^2$.

352. $y^2-x^2=a^2$.

353. $xy=a^2$. **354.** $x^ny^m=a^{n+m}$. **355.** $y^2+16\,px=0$.

356—378. В этих задачах удобно выразить отрезки T, N, S_t, S_n и проч через координаты x, y и угол α (см. ответы отд. III, к прим. 1—22), что дает или готовое выражение y через α, или конечное уравнение между x, y, α; затем, на основании формулы $dx=dy.\cot\alpha$, можно или получить x в функции α или, продифференцировав конечное уравнение между x, y, α и исключив dx и x, получить дифф. уравнение для y, как функции α. (В ответах α заменено на t).

356. $x=a\left(\cos t+\lg\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$
$y=a\sin t$.

357. $x=x_0+a(\lg\sin t-\sin^2 t)$
$y=a\sin t\cos t$.

358. $x=x_0+a(\lg\sin t-\sin^2 t)$
$y=a\sin t\cos t$.

359. $x=x_0+a\left\{\frac{\cos t}{2\sin^2 t}+\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)+\frac{1}{2}\log\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right\}$
$y=a\left(\frac{1}{\sin t}+\frac{1}{\cos t}\right)$.

360. $x=a(\sin t+\cos t)$
$y=y_0+a\left(\sin t-\cos t-\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{t}{2}\right)\right)$.

361. $x=x_0+\frac{a}{3(\sin t)^{3/2}}(1-3\sin^2 t)$
$y=\frac{a\cos t}{\sqrt{\sin t}}$.

362. $x=\frac{a}{\sin^2 t}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cot^2 t}$
$y=a\cot t\cdot e^{-\frac{1}{2}\cot^2 t}$.

363. $x = \frac{a}{\sin^2 t} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cot^2 t}$

$y = a \cot t \cdot e^{-\frac{1}{2}\cot^2 t}$.

364. $x = x_0 + a \lg \left\{ \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)}{\operatorname{tg} t} \right\}$

$y = a \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)$.

365. $x = x_0 + \frac{a}{2}(2t + \sin 2t)$

$y = \frac{a}{2}(1 - \cos 2t)$.

366. $x = x_0 + a\left(-\sin t + \frac{1}{2\sin^2 t}\right)$

$y = a(\cot t + \cos t)$.

367. $x = x_0 + a\left(\lg \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t - \sin t\right)$

$y = a(\sin t + \cos t)$.

368. $x = a(1 - \sin t)$

$y = a \cos t$.

369. $x = b \sin t + a(\cos t + t \sin t)$

$y = -b \cos t + a(\sin t - t \cos t)$.

370. $x = a + b \sin t$

$y = a - b \cos t$.

371. $x = \frac{a(\cos t - \sin t)}{\sqrt{1 - \sin t \cos t}} e^{-\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\operatorname{tg} t - 1}{\sqrt{3}}\right)}$.

$y = x \cdot \frac{\cos t}{\cos t - \sin t}$.

372. $x = \frac{a}{\sqrt{\sin t - \cos^2 t}} \left(\frac{2\sin t + 1 - \sqrt{5}}{2\sin t + 1 + \sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{5}}}$.

$y = x \cos t$.

373. $x = \frac{a}{\sin\frac{t}{2}\sqrt{\sin t}} e^{-\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}}$.

$y = x \sin t$.

374. $x = \frac{a}{1 - \sin t \cos t} \cdot e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\operatorname{tg} t - 1}{\sqrt{3}}}$.

$y = x \sin^2 t$.

375. $x = \frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t} \cdot y$

$y = a\sqrt{\frac{\cos 2t}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}} \cdot e$.

376. $x = a \sin t$.

$y = a(1 - \cos t)$.

377. $x = b \sin t$.

$y = a - b \cos t$.

378. $x = (a-b)\sin t - \frac{1}{2} a \sin^3 t.$

$y = b\cos t + \frac{1}{2} a \sin^2 t \cos t.$

379—390. В этих задачах следует брать выражения отрезков N, T и проч. через r и угол μ (см. отв. отд. III к прим. 31—37), что дает выражение r через μ, после чего из формулы $d\theta = \frac{dr}{r}\operatorname{tg}\mu$ получается θ, как функция от μ (в ответах μ заменено на u).

379. $r = a\sin(\theta-\theta_0)$. **380.** $r^2 = a^2 \sin 2(\theta-\theta_0)$. **381.** $r = a\sin(\theta-\theta_0)$.

382. $r = a\cos u.$ $\theta = \theta_0 + u - \operatorname{tg} u.$

383. $r = a\cos u.$ $\theta = \theta_0 + u - \operatorname{tg} u.$

384. $r = a\sin u \cos u.$ $\theta = \theta_0 + 2u - \operatorname{tg} u.$

385. $r = \frac{a\sin u \cos u}{\sin u + \cos u}.$

$\theta = \theta_0 + u - \operatorname{tg} u + \lg(1+\operatorname{tg} u).$

386. $r = a\sqrt{\sin u \cos u}.$

$\theta = \theta_0 + u - \frac{1}{2}\operatorname{tg} u.$

387. $r = a(\sin u + \cos u)$

$\theta = \theta_0 + u - \lg(1+\operatorname{tg} u).$

388. $r = \frac{a}{\cos u}.$

$\theta = \theta_0 + \operatorname{tg} u - u.$

389. $r = a\sqrt{\cos u}.$

$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(u - \operatorname{tg} u).$

390. $r^2 = \frac{a^2}{\sin 2(\theta-\theta_0)}.$

391—411. В этих задачах нужно брать выражения радиуса кривизны: $R = \frac{dx}{\cos\alpha d\alpha} = \frac{dy}{\sin\alpha d\alpha}$, что даст непосредственно выражение x или y через α; затем формула $dy = dx\cdot\operatorname{tg}\alpha$ определит другую координату через α.

391. $x = a\sin^5\alpha.$

$y = \frac{a}{3}\{8 - 15\cos\alpha + 10\cos^3\alpha - 3\cos^5\alpha\}.$

392. $x = \frac{1}{8}\sin\alpha\,\{2\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha + 15\cos\alpha - 24\} + \frac{15}{8}\alpha.$

$y = a(1-\cos\alpha)^4.$

393. $x = a\sin^3\alpha.$

$y = a(2 - 3\cos a + \cos^3\alpha).$

394. $x = x_0 + ak\int\frac{d\alpha}{\cos^k\alpha}.$

$y = \frac{a}{\cos^k\alpha}.$

395. $x = a\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$

$y = y_0 + \frac{a}{2}\log\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha}.$

396. $x = a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$

$y = y_0 + \frac{a}{2}\cdot\frac{1+\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{a}{2}\,\mathrm{lgtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$

397. $x = x_0 - \frac{a}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{a}{2}\log\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$

$y = a\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$

398. $x = a\sin\alpha$
$y = y_0 - a\cos\alpha$ или $x^2 + (y - y_0)^2 = a^2.$

399. $x = x_0 + a\,\mathrm{lg\,tg}\,\alpha$
$y = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$ или $y = be^{\frac{x}{a}}.$

400. $x = \frac{a}{2}\mathrm{tg}\,\alpha$
$y = y_0 + \frac{a}{4}\mathrm{tg}^2\alpha$ или $x^2 = a(y - y_0).$

401. $x = x_0 + a\left(\cos\alpha + \mathrm{lg\,tg}\,\frac{\alpha}{2}\right).$

$y = a\sin\alpha.$

402. $x = x_0 + \frac{k}{4}(1 - \cos 2\alpha)$

$y = y_0 + \frac{k}{4}\left(2\alpha - \sin 2\alpha\right).$

403. $x = x_0 - \frac{1}{2}k\cot^2\alpha$
$y = y_0 - k\cot\alpha$ или $(y - y_0)^2 = -2k(x - x_0).$

404. $x = x_0 - k\cos\alpha$

$y = y_0 + k\left[\mathrm{lgtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\alpha\right].$

405. $x = x_0 + k\alpha$

$y = y_0 - k\lg\cos\alpha.$

406. $x = x_0 + k \lg \sin \alpha$

$y = y_0 + k\alpha.$

407. $x = x_0 + a \lg \dfrac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$

$y = a \cdot \dfrac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}.$

408. $x = x_0 + k (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)$
$y = y_0 + k (-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha).$

409. $x = x_0 + k . \{2\alpha \cos \alpha + (\alpha^2 - 2) \sin \alpha\}$
$y = y_0 + k . \{2\alpha \sin \alpha - (\alpha^2 - 2) \cos \alpha\}.$

410. $(x - x_0)(y - y_0) = -\dfrac{1}{2} k^2.$ **411.** $(y - y_0)^2 - (x - x_0)^2 = k^2.$

412—421. В этих задачах из данного уравнения $R = \dfrac{ds}{d\alpha} = f(s)$ определяется s, как функция от α, после чего из формул $dx = ds . \cos \alpha$, $dy = ds . \sin \alpha$ находятся x и y, как функции от α.

412. $x = x_0 + 2a (\alpha \sin \alpha + \cos \alpha)$
$y = y_0 + 2a (-\alpha \cos \alpha + \sin \alpha).$

413. $x = 3a (\alpha^2 \sin \alpha + 2\alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha) + x_0$
$y = 3a (-\alpha^2 \cos \alpha + 2\alpha \sin \alpha + 2 \cos \alpha) + y_0.$

414. $x = a\alpha + x_0$
$y = a \lg \sec \alpha + y_0.$

415. $x = x_0 + \dfrac{a}{\sqrt{2}} \lg \left(\dfrac{1 + \sqrt{2} \sin \alpha}{1 - \sqrt{2} \sin \alpha} \right)$

$y = y_0 + \dfrac{a}{\sqrt{2}} \lg \left(\dfrac{\sqrt{2} \cos \alpha + 1}{\sqrt{2} \cos \alpha - 1} \right).$

416. $x = x_0 + a \lg \operatorname{tg} \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2} \right)$ или $y - y_0 = 2a \operatorname{sh}^2 \left(\dfrac{x - x_0}{2a} \right).$

$y = y_0 + \dfrac{a}{\cos \alpha}$

417. $x = x_0 + \dfrac{a}{4}(2\alpha + \sin 2\alpha).$

$y = y_0 + \dfrac{a}{4}(1 - \cos 2\alpha).$

418. $x = a (1 - \cos \alpha) + x_0$

$y = a \left\{ \lg \operatorname{tg} \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2} \right) - \sin \alpha \right\} + y_0.$

419. $x = x_0 + \frac{a}{2}e^{\alpha}(\sin\alpha + \cos\alpha)$. **420.** $x = \frac{a}{2}(\operatorname{sh}\alpha\cos\alpha + \operatorname{ch}\alpha\sin\alpha) + x_0$

$y = y_0 + \frac{a}{2}e^{\alpha}(-\cos\alpha + \sin\alpha)$. $y = \frac{a}{2}(\operatorname{sh}\alpha\sin\alpha - \operatorname{ch}\alpha\cos\alpha) + y_0$.

421. $x = x_0 - \frac{a}{3}\cos^3\alpha$

$y = y_0 + \frac{a}{3}\sin^3\alpha$ или $(x - x_0)^{2/3} + (y - y_0)^{2/3} = \left(\frac{a}{3}\right)^{2/3}$.

422. $r^{k-1} = a^{k-1}\sin(k-1)(\theta - \theta_0)$. (Данное уравнение приводится к более простому: $d\alpha = kd\theta$, откуда легко получить $d\mu = (k-1)d\theta$, $\mu = (k-1)(\theta - \theta_0)$, и далее из формулы $\frac{dr}{r} = d\theta\cot\mu$ вывести r).

423. $r = \frac{a}{\cos\mu}$, $\theta = \operatorname{tg}\mu - \mu$. (Представить R в виде: $R = \frac{r\,dr}{d(r\sin\mu)}$, после чего легко определяется r через μ и затем вычисляется θ из формулы $d\theta = \frac{dr}{r}\operatorname{tg}\mu$).

424—434. В этих задачах удобно представить R в виде:

$R = \frac{r}{\sin\mu}\cdot\frac{\frac{d\theta}{d\mu}}{1 + \frac{d\theta}{d\mu}}$, после чего легко получается $\frac{d\theta}{d\mu}$ и затем θ через угол μ; наконец формула $\frac{dr}{r} = d\theta\cdot\cot\mu$ определяет r через μ.

424. $r = \frac{a}{\cos\mu}$

$\theta = \theta_0 + \operatorname{tg}\mu - \mu$.

425. $r = a\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}$

$\theta = \theta_0 + \log\cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\mu}{2}\right)$.

426. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos\mu - \sin\mu}}\cdot e^{\frac{1}{2}\mu}$

$\theta = \theta_0 - \frac{1}{2}\lg(\cos\mu - \sin\mu) - \frac{1}{2}\mu$.

427. $r = \frac{a}{\sin\frac{\mu}{2}\sqrt{\sin\mu}}e^{-\frac{1}{4\sin^2\frac{\mu}{2}}}$

$\theta = \theta_0 - \mu - \cot\frac{\mu}{2}$.

428. $r=\frac{a}{\sqrt{1+\sin\mu\cos\mu}}\cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\mu+1}{\sqrt{3}}\right)}$

$\theta=\theta_0-\mu+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}\mu+1}{\sqrt{3}}\right).$

429. $r=a\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}}\cdot e^{\frac{1}{4\sin^2\frac{\mu}{2}}}$

$\theta=\theta_0+\cot\frac{\mu}{2}.$

430. $r=a\cot\mu\cot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2}\right)$

$\theta=\theta_0-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2}\right).$

431. $r=a\cot\mu$

$\theta=\theta_0-\operatorname{tg}\mu.$

432. $r=ae^{\mu}$

$\theta=\theta_0-\lg\cos\mu.$

433. $r=\frac{a}{\sin\mu}\sqrt{\sin\mu-\cos\mu}\cdot e^{-\frac{1}{2}\mu}$

$\theta=\theta_0-\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\log(\sin\mu-\cos\mu).$

434. $r=\frac{a}{1-\sin\mu}$

$\theta=\theta_0-\mu+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\mu}{2}\right)$ или $r=a$

435—453. В ответах буква b означает произвольный параметр.

435. $y^2-2bx=b^2 (b\geqslant 0)$. **436.** $\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{c^2-b^2}=1,\ b<c.$

437. $3x^2y-y^3=b^3.$ **433.** $\sin y=be^{-x}.$

439. $(x^2+y^2)^3=b^3(3x^2y-y^3).$ **440.** $5x^4y-10x^2y^3+y^5=b^5.$

441. $x^3y-xy^3=b^4.$ **442.** $(x^2+y^2)^2=b^2xy.$ **443.** $2x^2+3y^2=b^2.$

444. $y^2=2bx.$ **445.** $\frac{1}{x^{k-2}}-\frac{1}{y^{k-2}}=\frac{1}{b^{k-2}} (k\gtrless 2).$

446. $x^2+y^2=2bx.$ **447.** $x^2-y^2=b^2.$ **448.** $xy^3=b^4.$

449. $r^k=b^k\cos k\theta.$ **450.** $(x+x_0)^2+y^2=2bx_0y.$

451. $y^2+2xy-x^2=\pm b^2.$ **452.** $y^2=b(x-y\sqrt{3}).$

453. $r^k=b^k\sin(k\theta+\omega)$. (Не переходя к прямоугольным координатам, следует условие изогональности брать в виде $\mu_1-\mu=\omega$, где $\operatorname{tg}\mu=\frac{rd\theta}{dr}$).

454—471. Координаты эвольвенты x, y определяются по координатам эволюты x_c, y_c следующими уравнениями: $\frac{dy_c}{dx_c}=-\frac{dx}{dy}=\frac{y-y_c}{x-x_c}$, которые, по исключении y, приводят к линейному уравнению для x, как функции от t.

454. $x = a(t + \sin t) + b \sin \frac{t}{2}$.

$y = a(3 + \cos t) + b \cos \frac{t}{2}$.

455. $x = -a \sin t - \frac{p}{2} \sin t . \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)$.

$y = a \cos t - \frac{p}{2} \operatorname{tg} t + \frac{p}{2} \cot t . \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)$.

456. $x = b \cos t + \frac{1}{2} a \sin^2 t \cos t$.

$y = b \sin t + a \sin t \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 t\right)$.

457. $x = a \operatorname{ch} t + \frac{kb \operatorname{ch} t}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t}}$.

$y = b \operatorname{sh} t - \frac{ka \operatorname{sh} t}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + b^2 \operatorname{ch}^2 t}}$.

458. $x = t - b \operatorname{th} \frac{t}{a}$.

$y = a \operatorname{ch} \frac{t}{a} + \frac{b}{\operatorname{ch} \frac{t}{a}}$.

459. $x = a \cos t + \frac{kb \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$.

$y = b \sin t + \frac{ka \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$.

460. $x = -a \cos^3 t - b \sin t$.

$y = a \sin^3 t + b \cos t$.

461. $x = \frac{1}{2} p \cot^2 t - k \sin t$.

$y = p \cot t + k \cos t$.

462. $x = t + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^4 + t^4}}$.

$y = \frac{a^2}{t} + \frac{bt^2}{\sqrt{a^4 + t^4}}$.

463. $x = t - \frac{bt^2}{\sqrt{a^4 + t^4}}$.

$y = \frac{t^3}{3a^2} + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^4 + t^4}}$.

464. $x = b \sin t + a(\cos t + t \sin t)$.

$y = -b \cos t + a(\sin t - t \cos t)$.

465. $x = ae^{-t}(\cos t - \sin t) - b \sin t$.

$y = ae^{-t}(\cos t + \sin t) + b \cos t$.

466. $x = a\{2t \cos t + (t^2 - 2) \sin t\} - b \sin t$.

$y = a\{2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t\} + b \cos t$.

467. $x = 4a\left(t + \frac{1}{3}t^3\right) - \frac{bt}{\sqrt{1+t^2}}$

$y = a(1+t^2)^2 + \frac{b}{\sqrt{1+t^2}}$.

468. $x = 2a\cos t - a\cos 2t - b\sin\frac{3}{2}t$.

$y = 2a\sin t - a\sin 2t + b\cos\frac{3}{2}$.

469. $x = a(3\cos t - \cos 3t) - b\sin 2t$.
$y = a(3\sin t - \sin 3t) + b\cos 2t$.

470. $x = a\sqrt{\cos 2t}\cos t - b\sin 3t$.
$y = a\sqrt{\cos 2t}\sin t + b\cos 3t$.

471. $x = a(1+\cos t)\cos t - b\sin\frac{3}{2}t$.

$y = a(1+\cos t)\sin t + b\cos\frac{3}{2}t$.

472. $(x^2 + y^2 + z^2 - h^2)y = 2ahx$.

473. $2x^2z^2 = 4phxy + (h^2 - x^2)(x^2 + y^2)$.

474. $h^2(y^2 + z^2) = a^2x^2$.

475. $(3x - 2y - 3h)^2 + (x - 2z)^2 - 2(h - 2g)(x - 2z) + h^2 - 4hg = 0$.

476. $[h(x - b) + by]^2 + (b^2 - a^2)\,y^2 + h^2\,(z - b)^2 + 2bhy\,(z - b) = 0$.

477. $\{x^2 + y^2 + z^2 - h^2 - 2a\,(x + y + z - h)\}^2 =$
$= (x^2 + y^2 + z^2 - h^2)(4a^2 + h^2 - x^2 - y^2 - z^2)$.

ОТДЕЛ VI.

Определенные интегралы.

1. $\frac{\pi^2}{4}$ (Разбить на 2 интеграла с пределами $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ и положить во втором $y = \pi - x$).

2. $-\frac{\pi}{2}\log 2$ (Рассмотреть $\int_0^{\pi} \log\sin 2x\,dx = \int_0^{\pi} \log 2\sin x\,\text{cs}x\,dx$ и воспользоваться равенством $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x dx$).

3. $-\frac{\pi^2}{2}\log 2$ (Подстановка $\pi - x = y$ и пред. пример).

4. $\frac{\pi}{2}\log 2$. (По частям и см. 2).

5. $\frac{\pi}{2}\log 2$. (Подстановка $x = \sin y$ и прим. 4).

6. $-\frac{\pi}{2}\log 2$. (По частям и прим. 5).

7. $-\frac{\pi}{4}\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right)$. (По частям и прим. 6).

8. $\frac{\pi}{8}\log 2$. (Подстановка $x = \operatorname{tg} y$ и тождество: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\sin\left(\frac{\pi}{4}+y\right)dy =$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\cos y\,dy\Big)$.

9. $\pi\log 2$. (Подстановка $x = \operatorname{tg} y$ и прим. 2).

10. 0. $\Big[$Разбить на 2 интеграла: $(0, 1)$ и $(1, \infty)$ и во втором положить $x = \frac{1}{y}\Big]$.

11. 0 при n четном, π при n нечетном $\Big($составить формулу приведения при помощи тождества: $\frac{\sin nx}{\sin x} = \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} + 2\cos(n-1)x\Big)$.

12. 0 при n нечетном, π при n четном (приводится к предыдущему заменой $\sin nx \cos x$ полусуммой синусов).

13. 0 при n нечетном, $-\frac{\pi}{n}$ при n четном (по частям и прим. 12).

14. $\log\frac{a}{b}$ (дифф. по b).

15. $\frac{1}{2}\log\frac{b^2+m^2}{a^2+m^2}$ (дифф. по b).

16. $\operatorname{arc\,tg}\frac{m(b-a)}{m^2+ab}$ (дифф. по b).

17. $\log\frac{(2a)^{2a}(2b)^{2b}}{(a+b)^{2(a+b)}}$ (дифф. по b).

18. $\frac{\pi}{a}(e^{-ac} - e^{-ab})$ $\Big($дифф. по b привод. к инт. $\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a}\Big)$.

19. $(b-a)\sqrt{\pi}$ (дифф. по пар. b). **20.** π (дифф. по a).

21. $\operatorname{arc\,tg} \frac{a(b-c)}{a^2+bc}$ (дифф. по b). **22.** $\frac{1}{2} \log \frac{a^2+c^2}{a^2+b^2}$ (дифф. по b).

23. $\frac{\pi}{4}(1+a)e^{-a}\left(\text{из интеграла} \int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{b^2+x^2} \text{ дифф. по } b\right)$.

24. $\frac{\pi}{16}(3+3a+a^2)e^{-a}$ (из инт. $\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{b^2+x^2}$ двукратным дифф. по b).

25. $\frac{\pi}{2}\log(a+\sqrt{1+a^2})$ (дифф. по a).

26. $\frac{\pi}{2}\log\left(1+\frac{a}{b}\right)$ (дифф. по a).

27. $\frac{\pi}{2}(1-e^{-a})$ (дифф. по a и подст. $y=\operatorname{tg} x$).

28. $\frac{\pi}{2}\left[\operatorname{arc\,tg} a\sqrt{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\right]$ (дифф. по a и подстановки: $\operatorname{tg} x = \sin y$, $\operatorname{tg} y = z$).

29. $\pi \cdot \log \frac{a+\sqrt{1+a^2}}{2}$ (дифф. по a и прим. 6).

30. $\frac{\pi}{b}\log\left(1+\frac{a}{b}\right)$ (дифф. по a). **31.** $\pi \log \frac{1+\sqrt{a^2+1}}{2}$ (дифф. по a).

32. $\frac{\pi}{2}\log(a+\sqrt{1+a^2})$ (дифф. по a). **33.** $\pi \arcsin a$ (дифф. по a).

34. $\frac{\pi^2}{4} - \arccos^2 a$ (дифф. по a). **35.** $\sqrt{\pi}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$ (дифф. по b).

36. $\pi \log \frac{a+b}{2}$ (дифф. по b). **37.** $\frac{\pi}{2}(b-a)$ (дифф. по b).

38. $\frac{\pi}{4}$ (заменить $\sin^3(ax)$ через кратные дуги).

39. $\frac{\pi a}{4}$ (дифф. по a или интегрированием по частям).

40. $\frac{5\pi}{32}a^2$ (дифф. по a или интегрир. по частям).

41. $\frac{\pi}{2}$ при $a>b+c$, $\frac{3\pi}{8}$ при $a=b+c$, $\frac{\pi}{4}$ при $|b-c|<a<b+c$, $\frac{\pi}{8}$ при $a=|b-c|$, 0 при $a<|b-c|$ $\left(\text{Выводится из} \int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx\right)$.

42. $\frac{b\pi}{2}$ при $a>b$, $\frac{a\pi}{2}$ при $a<b$. (Дифф. по b или a).

43. $\frac{\pi}{2}b$ при $a \geqq b+c$; $\frac{\pi}{4}(a+b-c)$ при $|b-c| \leqq a \leqq b+c$; $\frac{\pi}{2}a$ при $b>c$ и $a \leqq b-c$; 0 при $b<c$ и $a \leqq c-b$. (Приводится к 42 или интегр. по частям).

44. $\frac{1}{2}\pi bc$ при $a \geqq b+c$, $\frac{\pi}{8}(2ab+2ac+2bc-a^2-b^2-c^2)$ при $a \leqq b+c$. (После интегр. по частям привод. к 43).

45. $\frac{3}{8}\pi a^2$ (Дифф. по a приводится к 42 или инт. по част.).

46. $\frac{1}{3}\pi a^3$ (Трижды интегрировать по частям).

47. $\frac{115}{384}\pi a^4$ (Четыре раза интегрировать по частям).

48. $\frac{1}{2}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{b+c}{a}+\operatorname{arc\,tg}\frac{b-c}{a}\right]$ (Дифф. по b).

49. $\frac{1}{4}\left[\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{3b}-3\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}\right]$ (Дифф. по a и пр. 45).

50. $\frac{3}{8}b\log\frac{a^2+9b^2}{a^2+b^2}+\frac{a}{4}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{3b}{a}-3\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}\right]$ (Дифф. по b и пр. 22).

51. $b\operatorname{arc\,tg}\frac{2b}{a}-\frac{a}{4}\log\frac{a^2+4b^2}{a^2}$ (Дифф. по a или по b).

52. $\frac{a}{4}\log\frac{a^2+(b-c)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b-c}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b-c}-\frac{b+c}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b+c}+$ $+\frac{\pi c}{2}$ (Дифф. по a и пр. 42).

53. $\frac{\pi}{2}\left[ab+(a^2-b^2)\log(a+b)-a^2\log a+b^2\log b\right]$. Дифф. по a и затем по b).

54. $\frac{2\pi}{3}[ab(a+b)-(a^3+b^3)\log(a+b)+a^3\lg a+b^3\log b]$.
(Дифф. по a и затем по b).

55—76. Эти интегралы вычисляются при помощи следующих разложений в ряды:

$$\frac{1-a\cos bx}{1-2a\cos bx+a^2}=1+\sum_1^\infty a^n\cos nbx,\ \frac{a\sin bx}{1-2a\cos bx+a^2}=$$

$$=\sum_1^\infty a^n\sin nbx,\ \frac{1-a^2}{1-2a\cos bx+a^2}=1+2\sum_1^\infty a^n\cos nbx,\ |a|<1.$$

55. 0 при $|a|<1$, $2\pi\log|a|$ при $|a|>1$. (Сперва продифф. по a, затем приложить предыд. разложения).

56. $-\frac{\pi}{n}a^n$ при $|a|<1$, $-\frac{\pi}{na^n}$ при $|a|>1$. (Сперва дифф. по a, затем разложить в ряд).

57. $\frac{\pi}{1-a^2}\log\frac{1-a^2}{2}$ при $|a|<1$; $\frac{\pi}{a^2-1}\log\frac{a^2-1}{2a^2}$ при $|a|>1$. (См. 13).

58. 0.

59. $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^b-a}$ при $|a|<1$, $\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{ae^b-1}$ при $|a|>1$.

60. π при $|a|<1$; 0 при $|a|>1$.

61. $\frac{\pi^2}{2(1-a^2)}$ при $|a|<1$, $\frac{\pi^2}{2(a^2-1)}$ при $|a|>1$.

62. $\frac{4\pi^2}{a}\log(1-a)$ при $|a|<1$, $\frac{4\pi^2}{a}\log\left(1-\frac{1}{a}\right)$ при $|a|>1$.

63. $\frac{2\pi^2a^m}{1-a^2}$ при $|a|<1$, $\frac{2\pi^2}{a^m(a^2-1)}$ при $|a|>1$.

64. $\frac{\pi}{2}a^{m-1}$ при $|a|<1$, $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a^{m+1}}$ при $|a|>1$.

65. $\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\log\frac{\sqrt{1-a^2}}{1+\sqrt{1-a^2}}$. (Положив $a=\sin\alpha$, приводим знаменатель к виду $1-2\lambda\cos x+\lambda^2$, где $\lambda=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, и прилагаем

формулы, данные выше 55 — 76, после чего восстановляем a по уравнению: $\lambda = \frac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\Big)$.

66. $\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\left(\frac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)^m$ (см. указ. к 65). **67.** 0 (см. 65).

68. $\frac{2\pi}{a}\log\left(1+\frac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)$(см. 65). **69.** $\pi\log\frac{1+\sqrt{1-a^2}}{2}$(см. 65).

70. $-\frac{\pi}{n}\cdot\left(\frac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)^n$ (см. 65). **71.** $\frac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}}$ (см. 65).

72. $\frac{2\pi^2}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)^m$. **73.** $\frac{8\pi^2}{a}\log\left[1-\frac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\right]$.

74. $\frac{\pi}{a}\cdot\left(\frac{a}{1+\sqrt{1-a^2}}\right)^m$. **75.** $\frac{\pi}{e^b(1+\sqrt{1-a^2})-a}$.

76. $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\cdot\frac{1+\sqrt{1-a^2}+ae^{-b}}{1+\sqrt{1-a^2}-ae^{-b}}$.

77—115. Эти интегралы приводятся к функциям Эйлера B и Γ.

77. $-\frac{\pi^2\cos a\pi}{\sin^2 a\pi}\left(\text{из интегр.} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} \text{ выводится дифф. по } a\right)$.

78. $\frac{\pi^3}{\sin^3(a\pi)}\cdot(1+\cos^2(a\pi)$ (Из 77 дифференцированием по a).

79. $-\frac{1}{m^2}\cdot\frac{\pi^2\cos\lambda\pi}{\sin^2\lambda\pi}$, $\lambda=\frac{k+1}{m}$. (Подстановкой $x^m=y$ привод. к 77).

80. $b^{a-1}\cdot\frac{\pi}{\sin a\pi}$ (подстановка $x=by$).

81. $\frac{\pi b^{a-1}}{\sin a\pi}\left(\log b-\frac{\pi\cos a\pi}{\sin a\pi}\right)$ (из предыд. дифф — ием по a).

82. $-\frac{\pi b^{a-2}}{\sin^2 a\pi}\left[\{1-(1-a)\log b\}\sin a\pi+\pi(1-a)\cos a\pi\right]$
(Из 81 дифф. по b).

83. $\frac{\pi}{m\sin\frac{\pi}{m}}$ (подстановка $x^m=y$).

84. $\frac{1}{n}\cdot\frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,(k-1)}{(p+1)\,(p+2)\ldots(p+k)}$ (подст. $x^n=y$).

85. $\frac{1}{n}\cdot\frac{(1-p)\,(2-p)\ldots(k-1-p)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k}\cdot\frac{\pi p}{\sin\pi p}$ (подст. $x^n=y$).

86. $\frac{\pi}{\sin p\pi}$. 87. $\frac{1}{a^{1-n}b^{1+n}}\cdot\frac{\pi}{2\cos\frac{n\pi}{2}}$ $\left(\text{подст. } \operatorname{tg}x=y,\ \frac{by}{a}=z\right)$.

88. $\frac{\pi}{2b\cos\frac{\pi a}{2b}}$$\left(\text{в инт.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{ch}ax}{\operatorname{ch}bx}dx\ \text{подстановки: } e^x=y, y^{2b}=z\right)$.

89. $\frac{\pi^2}{4b^2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi a}{2b}}{\cos^2\frac{\pi a}{2b}}$ (из 88 дифф—нием по a).

90. $\frac{1}{(1+a)^n}\cdot\frac{\pi}{\sin n\pi}$$\left(\text{Подстановки } \frac{x}{1-x}=y,\ y=\frac{z}{a+1}\right)$.

91. $\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin p\pi}$(подст. $\operatorname{tg}x=y$).

92. $\frac{1}{a^{1-\lambda}b^{\lambda}}\cdot\frac{\pi}{m\sin\lambda\pi}$, $\lambda=\frac{k+1}{m}$ (подст. $x^m=y$, $by=az$).

93. $\frac{1}{a^{p-\lambda}b^{\lambda}}\cdot\frac{\pi}{m\sin\lambda\pi}\cdot\frac{(1-\lambda)(2-\lambda)\ldots(p-1-\lambda)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(p-1)}$

(подст. пр. 92), $\lambda=\frac{k+1}{m}$.

94. $\frac{3\pi\sqrt{2}}{128}$ (разбить на 2 инт., введя $x^6=x^2(1+x^4)-x^2$).

95. $\frac{8\pi\sqrt{3}}{729}$ (разбить на 3 интеграла, введя $x^6=(1+x^3)^2-$
$-2(1+x^3)+1$).

96. $\frac{1}{2a^nb^m}\cdot\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ (подстановки: $\operatorname{tg}x=y$, $y^2=z$).

97. $\frac{2^{n-1}}{(a^2-b^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(n)}$.

$\left(\text{Подстановка } \operatorname{tg}\frac{x}{2}=y,\ y=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\cdot z\right)$.

98. $\frac{1}{m}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{m}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k}{m}\right)}$. (Подстановка $x^m=y$).

99. $\frac{1}{2}\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$. Подстановка $\sin x=y$).

100. $\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{k+1}{n}\right)$. (Подстановка $x^n=y$).

101. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. $\Big($Выводится из $\int\limits_0^\infty e^{-a^2x}\sin x dx$ интегрированием по a от 0 до ∞).

102. $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. $\Big($Выводятся из $\int\limits_0^\infty e^{-a^2x}\cos x dx$ интегр-ием по a от 0 до ∞).

103. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)$. Из 101 и 102 подстановкой $x=y^2$ находим $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos y^2 dy$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sin y^2 dy$, после чего вводим $y=x+a$).

104. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}-a^2\right)$. (См. указ. к 103).

105. $\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$. $\Big($Из $\int\limits_0^\infty e^{-a^nx}\sin x dx$ интегрированием по a от 0 до ∞).

106. $\frac{\pi}{2\cos\frac{\pi}{2n}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$. $\Big($Из $\int\limits_0^\infty e^{-a^nx}\cos x dx$ интегрированием по a от 0 до ∞).

107. $\frac{1}{2}\log 2\pi$. (В интегр. делается замена x на $1-x$, два интеграла складываются, и прилагается формула $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin\pi x}\Big)$.

108. $a \log a - a + \frac{1}{2} \log 2\pi$. (Дифф. по a и прим. 107).

109. π (В интегралах с пределами $(-\infty, +\infty)$ положить $e^x = t$, $t^2 = u$).

110. $\dfrac{\pi}{n^2 \sin \dfrac{m\pi}{n}}$ (подстановка $x^n = y$).

111. $\dfrac{\pi}{2p} \operatorname{tg} \dfrac{p\pi}{2}$ (подстановка $\sin x = y$).

112. $\dfrac{2\pi}{n(n-2)} \cot \dfrac{\pi}{n}$ (подстановка $x^n = y$).

113. $\dfrac{2n\pi}{(3n-2)(n^2-4)} \cot \dfrac{\pi}{n}$ (подстановка $x^n = y$).

114. $\dfrac{\pi}{2 \operatorname{ch} \dfrac{\mu\pi}{2}}$. $\left(\text{Рассмотреть} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{\mu x i} dx}{e^x + e^{-x}} \text{ и полож. } e^x = y^{1/2}\right)$.

115. $\dfrac{\pi}{2 \operatorname{ch} \dfrac{\mu\pi}{2}} \cdot \dfrac{(\mu^2 + 1^2)(\mu^2 + 3^2) \cdots \left(\mu^2 + \overline{2n-1}^2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2n}$. (Введя в числитель $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ и дважды интегрируя по частям, легко вывести формулу приведения для интегр. $J_k = \int\limits_0^\infty \dfrac{\cos \mu x dx}{(\operatorname{ch} x)^k}$: $J_{k+2} = \dfrac{\mu^2 + k^2}{k(k+1)} J_k$, после чего, на осн. 114, легко получается результат).

116. Подстановка $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \cos \varphi = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \cos \psi}$ дает $d\varphi = \dfrac{-d\psi}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x \cos \psi}$.

117. Разложить $\cos(x \cos \varphi)$ в ряд по степеням $x \cos \varphi$ и воспользоваться значением интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \varphi \, d\varphi$.

118. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (Интегр. по параметру x).

119. Левая часть уравнения приводится к

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cos(x\cos\varphi)\, d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x\cos\varphi)\cdot\frac{\cos\varphi}{x}\, d\varphi$$ и после инт-ия первого члена по частям дает 0.

120. $\dfrac{aJ_0(b)J'_0(a)-bJ_0(a)J_0'(b)}{b^2-a^2}$. Составляется дифф. ур. для функции $J_0(ax)$: $\dfrac{d^2}{dx^2}J_0(ax)+\dfrac{1}{x}\dfrac{d}{dx}J_0(ax)+a^2J_0(ax)=0$, аналогичное ур. для $J_0(bx)$, эти уравнения умножаются на $-J_0(bx)$, $+J_0(ax)$ и складываются, после чего находится легко искомый интеграл помощью инт-ия по частям).

121. $\dfrac{1}{2}\,[J_0^2(a)+J'^2(a)]$. [Выводится из 120 раскрытием неопределенности, принимая во внимание дифф. ур-ие 119 для функции $J_0(a)$].

122. $\dfrac{J_0'(a)}{a}$ (Интегрировать по x от 0 до 1 дифф. ур-ие функции $J_0(ax)$, приведенное выше, см. 120).

123. e^{-a} (Назвав искомый интеграл через $\varphi(a)$, дважды дифференцируем по (a), при чем каждый раз выполняем инт-ие по частям, и приходим—принимая во вним. прим. 119—к дифф. уравнению $\varphi''(a)=\varphi(a)$; из условий $\varphi(+\infty)=0$, $\varphi'(0)=-1$ определяем $\varphi(a)=e^{-a}$).

124. $\dfrac{1}{2}\,(1-e^{-a})$. (Из 123 дифф-ием по a и инт-ием по частям).

125. Первый интеграл, после подстановки в уравнение, дает

$$\int_0^{\pi}\left[-(k-1)\sin^2\varphi T^{k-2}+\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sh}x}T^{k-1}\right]d\varphi=\left[\frac{\sin\varphi}{\operatorname{sh}x}T^{k-1}\right]_{\varphi=0}^{\pi}=0,$$

и второй дает:

$$\int_0^{\pi}\left[-(k+2)\sin^2\varphi T^{-(k+3)}-\frac{\cos\varphi}{\operatorname{sh}x}T^{-(k+2)}\right]d\varphi=\left[\frac{-\sin\varphi}{\operatorname{sh}x}T^{-(k+2)}\right]_{\varphi=0}^{\pi}=$$

$$=0,\ T=\operatorname{ch}x+\operatorname{sh}x\cos\varphi.$$

126. После подстановки интеграла в уравнение получается

$$\frac{3}{4}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin^2\varphi\cos n\varphi\,d\varphi}{(x-\cos\varphi)^{5/2}}-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos\varphi\cos n\varphi\,d\varphi}{(x-\cos\varphi)^{3/2}}+n^2\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos n\varphi\,d\varphi}{(x-\cos\varphi)^{1/2}},$$

и после двукратного инт-ия по частям в первом интеграле сумма приводится к 0.

127. Подстановка первого интеграла дает:

$$-\frac{3}{4}\int_0^\infty\frac{\operatorname{sh}^2\varphi\cos\mu\varphi\,d\varphi}{(\operatorname{ch}\varphi-x)^{5/2}}+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\operatorname{ch}\varphi\cos\mu\varphi\,d\varphi}{(\operatorname{ch}\varphi-x)^{3/2}}-\mu^2\int_0^\infty\frac{\cos\mu\varphi\,d\varphi}{(\operatorname{ch}\varphi-x)^{1/2}}$$

и, после двукратного интегрирования по частям первого интеграла, сумма приводится к 0.

128. $\dfrac{\alpha}{2\sin\alpha}\cdot$ **129.** $\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}}\cdot$

130. $\dfrac{1}{c}\operatorname{arctg}\dfrac{ab}{c\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\cdot$ **131.** $\dfrac{2\pi}{aa_1(a+a_1)^2}\cdot$ **132.** $\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)\cdot$

133. Выразить поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=1$, вырезаемую плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, при помощи координат u, v, полагая: $x=\sin u\cdot\sqrt{1-a^2\sin^2 v}$, $y=\cos u\cdot\cos v$.

ОТДЕЛ VII.

Ряды.

1—26. Эти ряды легко исследуются помощью признака сходимости: $\lim\limits_{n=\infty}|u_n|\cdot n^\mu=A$ (кон. число, неравное 0) при $\mu>1$.

1. Неабсолютно сходящийся. **2.** Абсолютно сходящийся.
3. При $|x|<1$ — абсол. сходящийся, при $x=+1$ — неабс. сход.
4. При $pl-k>1$ — абс. сход. **5.** При $pl-k>1$ — абс. сход.
6. При $pl-k>1$ — абс. сход. **7.** При $pl>1$ — абс. сход.
8. При $(m-1)p-k>1$ — абс. сход. **9.** При $pl-k>1$ — абс. сход.
10. При $p>2$ — абс. сход. **11.** Абсолютно сходящийся.

12. Расходящийся. **13**. При $a=0$, $b=\frac{2}{3}a_1$—абс. сход.

14. При $a=b=1$ — абс. сход. **15**. При $a=2$—абс. сход.

16. При $b=a^{\pi}$ — абс. сход. **17**. Абсолютно сходящийся.

18. При $p>\frac{1}{3k}$ — абс. сход. **19**. При $p>\frac{1}{2}$ — абс. сход.

20. Абсолютно сходящийся. **21**. Абсолютно сходящийся.

22. При $p>\frac{1}{2}$ — абс. сход. **23**. При $p>\frac{1}{3}$ — абс. сх.

24. Абсол. сход. **25**. Абсол. сход. **26**. Абсол. сход.

27—40. Эти ряды исследуются помощью признака сходимости Гаусса: $\underset{n=\infty}{\text{пред.}}\; n\left[\left|\frac{u_n}{u_n+1}\right|-1\right]=k>1$.

27. При $|x|\leqq 1$—абс. сход. **28**. При $p>\frac{1}{2}$— абс. сход.

29. При $a>p+1$—абс. сход. **30**. При $p>\frac{1}{b-a}$— абс. сход.

31. При $b<\frac{a}{a+1}$— абс. сход. **32**. При $p>\frac{3}{2}$— абс. сход.

33. При $p>2$— абс. сход. **34**. При $p>\frac{1}{1-a}$— абс. сход.

35. При $p>a$— абс. сход. **36**. При $q>1-\frac{p}{2}$— абс. сход.

37. При $q>1+\frac{p}{2}$ абс. сход. **38**. Расходящийся.

39. Расходящийся. **40**. Расходящийся.

41—42. Данные дроби разлагаются на простейшие.

41. $u_n=\left[\frac{2}{21}\cdot\frac{1}{3^n}+\frac{9}{28}\cdot\frac{(-1)^n}{4^n}\right]x^n$, при $|x|<3$— абс. сход.

42. $u_n=\left[(n+1)^2+1\right]x^n$, при $|x|<1$— абс. сход.

43—47. Разложения определяются способом неопределенных коэффициентов, на основании теоремы умножения рядов.

43. $1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\frac{31}{15120}x^6+\cdots+a_n x^{2n}+\cdots,$

$$a_n-\frac{a_{n-1}}{3!}+\frac{a_{n-2}}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{a_0}{(2n+1)!}=0,$$

при $|x|<\pi$ — абс. сход.

44. $1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{45}x^4-\frac{2}{945}x^6-\cdots+a_n x^{2n}+\cdots,$

$$a_n-\frac{a_{n-1}}{3!}+\frac{a_{n-2}}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{a_0}{(2n+1)!}=\frac{(-1)^n}{2n!},$$

при $|x|<\frac{\pi}{2}$ — абс. сход.

45. $2-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{120}x^4-\frac{1}{3024}x^6+\cdots+a_n x^{2n}+\cdots,$

$\frac{a_n}{2!}+\frac{a_{n-1}}{4!}+\frac{a_{n-2}}{6!}+\cdots+\frac{a_0}{2n!}=0$, при $|x|<2\pi$ — абс. сход.

46. $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{24}x^3-\frac{19}{720}x^4+\cdots+a_n x^n+\cdots,$

$a_n-\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{a_{n-2}}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{a_0}{n+1}=0$, при $|x|<1$ абс. сход.

47. $1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{720}x^4+\frac{1}{30240}x^6-\cdots+a_n x^n+\cdots,$

$a_n+\frac{a_{n-1}}{2!}+\frac{a_{n-2}}{3!}+\cdots+\frac{a_0}{(n+1)!}=0$, при $|x|<2\pi$ — абс. сход.

48—55. В этих задачах разлагается сперва производная функция, и полученный ряд интегрируется.

48. $\sum_0^\infty(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}+\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right],\ |x|\leqq 1.$

49. $\sum_0^\infty(-1)^n\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right],\ |x|\leqq 1.$

50. $\sum_0^\infty(-1)^n\left[\frac{x^{3n+1}}{3n+1}-\frac{x^{3n+2}}{3n+2}\right],\ |x|\leqq 1.$

51. $\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{x^{6n+1}}{6n+1}+\frac{x^{6n+5}}{6n+5}\right]$, $|x|\leqq 1$.

52. $\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{x^{6n+1}}{6n+1}-\frac{x^{6n+5}}{6n+5}\right]$, $|x|\leqq 1$.

53. $x-\frac{2}{3}x^3+x^5-\frac{13}{7}x^7+\frac{34}{9}x^9+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$,
$(2n+1)\,a_{2n+1}+3\,(2n+3)\,a_{2n+3}+(2n+5)\,a_{2n+5}=0$,
$|x|<\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.

54. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{40}x^5+\frac{1}{48}x^6+\cdots+a_n x^n+\cdots$,
$na_n+2\,(n+1)\,a_{n+1}+2(n+2)\,a_{n+2}=0$, $|x|<\sqrt{2}$.

55. $-x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^6-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{8}x^8+$
$+\frac{2}{9}x^9+\cdots+a_n x^n\cdots$, $na_n-(n+1)\,a_{n+1}+(n+2)\,a_{n+2}=0$,
$|x|<1$.

56—69. Общий метод решения этих задач такой: назвав искомую сумму через $f(x)$, находим дифф-ием ряда $f'(x)$ (в зад. 56 и 59 предварительно надо умножить ряд на x^3, в зад. 56 дифф-ть дважды), откуда $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\,dx$.

56. $\frac{1}{x^3}\left[e^x(x^2-2x+2)-2\right]$, x им. любое значение.

57. $\frac{3}{2}x-\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arc\,tg}x$, $|x|\leqq 1$.

58. $\frac{x^2-1}{2}\log\,(1+x)+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2$, $|x|\leqq 1$.

59. $\frac{x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x}{2x^3}$, x — люб. число. **60.** $\frac{x}{1-x}+\log\,(1-x)$, $|x|<1$.

61. $\frac{2x-x^2}{1-x}+2\log\,(1-x)$, $|x|<1$. **62.** $\frac{1}{3}\log\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+1}$, $-1<x\leqq 1$.

63. $\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$, $|x|\leqq 1$.

64. $(x^2-2)\sin x+2x\cos x$, x — любое число.

65. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$, $|x|\leqq 1$. **66.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}$, $|x|\leqq 1$.

67. $\frac{x^3}{6}\log\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{6}\log(1-x^2)+\frac{1}{6}x^2$, $|x|<1$.

68. $\operatorname{arc\,tg}x+\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$, $|x|<1$.

69. $\frac{16}{15}-\frac{2}{15}(8+4x+3x^2)\sqrt{1-x}$, $|x|\leqq 1$.

70. $\frac{a_0\alpha+(a_1\alpha+a_0\beta)x}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}$ (проверить разложение способом неопр. к-тов). Ряд сходящийся при $|x|<$ наименьшего модуля корней уравнения $\alpha+\beta x+\gamma x^2=0$.

71. $\frac{1}{1-x-x^2}$, $|x|<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (частный случ. 70).

72. $a_0+\int_0^x\frac{a_1\alpha+(2a_2\alpha+a_1\beta)x}{\alpha+\beta x+\gamma x^2}\,dx$, границы сходимости, как 70. (Данный ряд продифф-ть, после чего приложить рез. 70).

73. $1+\frac{4}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{6}\right]$, $|x|<1$ (частный случ. 72).

74—80. Эти суммы находятся заменою дроби $\frac{1}{n}$ интегралом $\int_0^1 x^{n-1}\,dx$.

74. $\int_0^1\frac{1-x}{1+x^3}\,dx=\frac{2}{3}\log 2$. **75.** $\int_0^1\frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})$.

76. $\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2$.

77. $\int_0^1\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{2}\right]$.

78. $\int_0^1\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

79. $\int_0^1\frac{dx}{1+x^6}=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3})$. **80.** $\int_0^1\frac{1+x^4}{1+x^6}\,dx=\frac{\pi}{3}$.

81—90. В этих рядах нужно каждый член разложить на простейшие дроби.

81. $\frac{1}{4}$. **82.** $\frac{\pi-2}{4}$. **83.** $\frac{2}{3}\log 2$ (см. 74). **84.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})$ (см. 75).

85. $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\log 2-1$ (см. 76). **86.** $\frac{1}{8\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})+\frac{\pi\sqrt{2}}{32}$ (см. 77).

87. $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}$ (см. 78). **88.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{8}-\frac{1}{2}$ (см. 78). **89.** $\frac{\pi}{36}+\frac{1}{12\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3}$ (см. 79). **90.** $\frac{\pi-3}{6}$ (см. 80). **91.** Ряд приводится к виду:

$\frac{1}{\Gamma(k)}\{C_0 B(1,k)+C_1 B(a+1,k)+\cdots+C_n B(na+1,k)+\cdots\}$, после чего функция $B(l,k)$ заменяется интегралом $\int\limits_0^1 t^{l-1}(1-t)^{k-1}\,dt$, и результат получается непосредственно.

92. $\log 2$. **93.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. **94.** $\frac{1}{4}\log 2+\frac{\pi}{8}$. **95.** $2\log 2-1$.

96. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$. **97.** $\frac{2}{3}\log 2$. **98.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2})+\frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-1)$.

99. $\frac{1}{4}$. **100.** $\log 2-\frac{1}{2}$. **101.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}-\frac{1}{4}\log 3$. **102.** $\frac{1}{4}\log 2$.

103. $2\log 2-\frac{5}{4}$. **104.** $\frac{1}{2}(1-\log 2)$. **105.** $\frac{2}{3}\log 2-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

106. $\frac{\pi}{8}(\sqrt{2}-1)$. **107.** $-\frac{5}{12}+\frac{2}{3}\log 2$. **108.** $\frac{5-\pi}{12}-\frac{1}{6}\log 2$.

109. $\int\limits_0^1(1-t)\log(1+t^2)dt=\frac{\pi-3}{2}$. **110.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-t)^2\log(1+t^2)dt=$ $=\frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{2}-\log 2-\frac{5}{6}\right]$. **111.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-t)^2\operatorname{arc\,tg}(t^2)\,dt=\frac{1}{4}\log 2+$ $+\frac{\sqrt{2}}{3}\log(1+\sqrt{2})-\frac{1}{3}-\frac{\pi}{24}(2\sqrt{2}-1)$. **112.** $\int\limits_0^1\frac{(1-t)\,dt}{\sqrt{1+t^2}}=$ $=\log(1+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)$. **113.** $\int\limits_0^1\frac{(1-t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\pi}{2}-1$.

114. $\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{(1-t)^2\,dt}{\sqrt{1+t^2}}=1-\frac{3}{4}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\log(1+\sqrt{2}).$

115. $\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{(1-t)^2\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{3}{8}\pi-1.$ **116.** $\frac{1}{2}\int\limits_0^1(1-t)^2\log\left(\frac{1}{1-t^2}\right)dt=$

$=\frac{17}{18}-\frac{4}{3}\log 2.$ **117.** $\int\limits_0^1\frac{t^2(1-t)^2}{2+t}dt=36\log\frac{3}{2}-\frac{175}{12}.$

118. $\frac{3}{2}\int\limits_0^1\frac{t(1-t)^2}{3+t^2}\,dt=\frac{3}{2}\left[\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{3}{2}-\log\frac{4}{3}\right].$

119. Следует из формулы $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi d\varphi=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots2n-1}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{\pi}{2}.$

120. Следует из формулы $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}\varphi d\varphi=\frac{2\cdot4\cdots2n}{3\cdot5\cdots(2n+1)}.$

121. $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\log(1+\sin^2\varphi)\,d\varphi=2\log\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right).$

122. $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arc\,tg}(\sin\varphi)}{\sin\varphi}d\varphi=\log(1+\sqrt{2}).$ **123.** $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{1+\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

124. $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2d\varphi}{2+\sin^2\varphi}=\sqrt{\frac{2}{3}}$ **125.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1+\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2}).$

126. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\varphi\,d\varphi}{2+\sin^2\varphi}=\frac{1}{\sqrt{3}}\log(2+\sqrt{3}).$ **127.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\varphi\,d\varphi}{2-\sin^2\varphi}=\frac{\pi}{2}.$

128. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin\varphi\,d\varphi}{3+\sin^2\varphi}=\frac{3}{4}\log 3.$ **129.** $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\log\left(\frac{1}{1-\cos\varphi}\right)d\varphi=\log 2.$

130. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin\varphi\, d\varphi}{4-\sin^2\varphi} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **131.** $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a d\varphi}{a+\sin^2\varphi} = \sqrt{\frac{a}{1+a}}$.

132. $\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a dx}{a-\sin^2 x} = \sqrt{\frac{a}{a-1}}$.

133. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sin x}{a+\sin^2 x}\, dx = \frac{a}{2\sqrt{1+a}} \log\frac{\sqrt{1+a}+1}{\sqrt{1+a}-1}$.

134. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \sin x dx}{a-\sin^2 x} = \frac{a}{\sqrt{a-1}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{a-1}}$. **135.** Вывод основан на формуле $\frac{1}{n^2} = -\int\limits_0^1 x^{n-1} \log x dx$. **136.** $-\int\limits_0^1 \frac{\log x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\log 2$.

137. $-\int\limits_0^1 \frac{\log x dx}{\sqrt{1-x}} = 4(1-\log 2)$.

138. $-\int\limits_0^1 \frac{\log x dx}{\sqrt{1+x}} = 4(\sqrt{2}-1) - 4\log\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

139. $-\int\limits_0^1 \frac{x^2 \log x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right)$

140. $\frac{4}{\pi}\sum\limits_0^\infty \frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{c} = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 < x < c \\ 0 \text{ при } x = 0, \pm c \\ -1 \text{ при} -c < x < 0. \end{cases}$

141. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum\limits_0^\infty \frac{1}{2k+1}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{c} = \begin{cases} 0 \text{ при} -c < x < 0 \\ \frac{1}{2} \text{ при } x = 0, \mp c \\ 1 \text{ при } 0 < x < c. \end{cases}$

142. $\frac{c}{2} - \frac{c}{\pi}\sum\limits_1^\infty \frac{1}{k}\sin\frac{2k\pi x}{c} = \begin{cases} x \text{ при } 0 < x < c \\ \frac{1}{2} c \text{ при } x = 0, c. \end{cases}$

143. $\frac{2c}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{c}=\begin{cases}x \text{ при} -c<x<c\\ 0 \text{ при } x=\pm c.\end{cases}$

144. $\frac{c}{2}-\frac{4c}{\pi^2}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{c}=|x| \text{ при} -c\leqq x\leqq +c.$

145. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}=\begin{cases}0 \text{ при} -\pi<x\leqq 0\\ x \text{ при } 0\leqq x<\pi\\ \frac{\pi}{2} \text{ при } x=\pm\pi.\end{cases}$

146. $\frac{3\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}-\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\begin{cases}x \text{ при } 0<x\leqq\pi\\ \pi \text{ при } \pi\leqq x<2\pi\\ \frac{\pi}{2} \text{ при } x=0, 2\pi.\end{cases}$

147. $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos(4k+2)x}{(2k+1)^2}=\begin{cases}x \text{ при } 0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\\ \pi-x \text{ при } \frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi.\end{cases}$

148. $\frac{\pi}{4}(a-b)-\frac{2}{\pi}(a-b)\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+$

$+(a+b)\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k}=\begin{cases}bx \text{ при} -\pi<x\leqq 0\\ ax \text{ при } 0\leqq x<\pi\\ \frac{a-b}{2}\pi \text{ при } x=\pm\pi.\end{cases}$

149. $\frac{\pi^2}{3}-4\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\cos kx}{k^2}=x^2 \text{ при} -\pi\leqq x\leqq +\pi.$

150. $\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}-4\pi\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}=\begin{cases}x^2 \text{ при } 0<x<2\pi\\ 2\pi^2 \text{ при } x=0, 2\pi.\end{cases}$

151. $\frac{\pi^2}{3}+\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k^2}-\pi\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{k}=\begin{cases}x^2 \text{ при } 0<x<\pi\\ \frac{1}{2}\pi^2 \text{ при } x=0, \pi.\end{cases}$

152. $2\pi\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k}-\frac{8}{\pi}\sum_{0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3}=\begin{cases}-x^2 \text{ при} -\pi<x\leqq 0\\ +x^2 \text{ при } 0\leqq x<\pi\\ 0 \text{ при } x=\pm\pi.\end{cases}$

153. $\frac{\pi^2}{6} - 2\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k-1}\cos kx}{k^2} + \pi \sum_1^\infty \frac{(-1)^{k-1}\sin kx}{k} -$

$$-\frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} = \begin{cases} 0 \text{ при } -\pi < x \leqq 0 \\ x^2 \text{ при } 0 \leqq x < \pi \\ \frac{1}{2}\pi^2 \text{ при } x = \pm\pi \end{cases}$$

154. $\frac{2}{3}c^2 + \frac{4c^2}{\pi^2}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} \cos\frac{k\pi x}{c} = c^2 - x^2$ при $-c \leqq x \leqq +c$.

155. $\frac{12c^3}{\pi^3}\sum_1^\infty (-1)^{k-1}\cdot \frac{\sin\frac{k\pi x}{c}}{k^3} = x(c^2 - x^2)$ при $-c \leqq x \leqq +c$.

156. $\frac{8}{15}c^4 + \frac{48c^4}{\pi^4}\sum_1^\infty (-1)^{k-1}\frac{\cos\frac{k\pi x}{c}}{k^4} = (c^2 - x^2)^2$ при $-c \leqq x \leqq +c$.

157. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\cos 2kx}{4k^2 - 1} = \sin x$ при $0 \leqq x \leqq \pi$.

158. $\frac{8}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k-1}k}{4k^2 - 1}\sin 2kx = \begin{cases} \sin x \text{ при } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 \text{ при } x = \pm\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

159. $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{(-1)^k \cos 2kx}{4k^2 - 1} = \cos x$ при $-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$.

160. $\frac{8}{\pi}\sum_1^\infty \frac{k}{4k^2 - 1}\sin 2kx = \begin{cases} \cos x \text{ при } 0 < x < \pi \\ 0 \text{ при } x = 0,\ \pi. \end{cases}$

161. $1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_2^\infty \frac{(-1)^k}{k^2 - 1}\cos kx = x\sin x$ при $-\pi \leqq x \leqq +\pi$.

162. $-\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_2^\infty \frac{(-1)^k k}{k^2 - 1}\sin kx = \begin{cases} x\cos x \text{ при } -\pi < x < +\pi. \\ 0 \text{ при } = \pm\pi. \end{cases}$

163. $-\log 2 - \sum_1^\infty \frac{\cos kx}{k} = \lg\sin\frac{x}{2}$ при $0 < x < 2\pi$.

164. $$\frac{2\sin\mu\pi}{\pi}\cdot\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{k}{k^2-\mu^2}\sin kx = \begin{cases}\sin\mu x \text{ при } -\pi < x < +\pi\\ 0 \text{ при } x = \pm\pi.\end{cases}$$

165. $$\frac{\sin\mu\pi}{\mu\pi}+\frac{2\mu\sin\mu\pi}{\pi}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{1}{k^2-\mu^2}\cos kx=\cos\mu x$$ при $-\pi\leqq x\leqq+\pi$.

166. $$\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{k^2+1}\sin kx=\begin{cases}\mathrm{sh}\,x \text{ при } -\pi<x<+\pi\\ 0 \text{ при } x=\pm\pi.\end{cases}$$

167. $$\frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}+\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{k^2+1}\cos kx=\mathrm{ch}\,x \text{ при } -\pi\leqq x\leqq+\pi.$$

168. $$\frac{\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}-\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2+1}\cos kx+$$
$$+\frac{2\,\mathrm{sh}\,\pi}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}k}{k^2+1}\sin kx=\begin{cases}e^x \text{ при } -\pi<x<+\pi\\ \mathrm{ch}\,\pi \text{ при } x=\pm\pi.\end{cases}$$

169. $$S_3=\frac{1}{4}n^4-\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2,\quad S_4=\frac{1}{5}n^5-\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n,$$
$$S_5=\frac{1}{6}n^6-\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2,$$
$$S_6=\frac{1}{7}n^7-\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n,$$
$$S_7=\frac{1}{8}n^8-\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2,$$
$$S_8=\frac{1}{9}n^9-\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n,$$
$$S_9=\frac{1}{10}n^{10}-\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8-\frac{7}{10}n^6+\frac{1}{2}n^4-\frac{3}{20}n^2.$$

(Эти результаты получаются удобнее всего по формуле Эйлера-Маклорена).

170. $T_2 = 2n^2 - n$, $T_3 = 4n^3 - 3n^2$, $T_4 = 8n^4 - 8n^3 + n$, $T_5 = 16n^5 - 20n^4 + 5n^2$, $T_6 = 32n^6 - 48n^5 + 20n^3 - 3n$, $T_7 = 64n^7 - 112n^6 + 70n^4 - 21n^2$, $T_8 = 128n^8 - 256n^7 + 224n^5 - 112n^3 + 17n$, $T_9 = 256n^9 - 576n^8 + 672n^6 - 504n^4 + 153n^2$.

(Получаются из формулы $T_k = 1^k + 2^k + \ldots + (2n-1)^k - 2^{k+1}\left[1^k + 2^k + (n-1)^k\right]$).

171. $2n^2 - 3n + 1$. **172.** $\frac{8}{3}n^3 - 2n^2 - \frac{5}{3}n + 1$.

173. $\frac{(n-k+1)(n-k+2)\ldots n(n+1)}{k+1}$. **174.** $\frac{1}{4}$. **175.** $\frac{11}{18}$.

176. $\frac{19}{36}$. **177.** $\frac{17}{180}$. **178.** $\frac{1217}{26880}$. **179.** $\frac{5}{36}$.

180. $\frac{1}{1440}$. **181.** $\frac{517}{1080}$. **182.** $\frac{7}{96}$.

183. $1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\cdot 5^4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^5} + \frac{2}{12}\cdot\frac{5}{5^6} + \vartheta\cdot\frac{2^3}{720}\cdot\frac{210}{5^8} = 1{,}00453$.

184. $\log 10 - \frac{1}{2}\,[0{,}01 - 0{,}1] + \frac{1}{12}\left[-\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^2}\right] - \frac{\vartheta}{120}\left[\frac{-1}{10^8} + \frac{1}{10^4}\right] = 2{,}348410$.

185. $\frac{1}{3}\log 4 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{400} - \frac{1}{100}\right] + \frac{3}{12}\left[\frac{-1}{400^2} + \frac{1}{100^2}\right] - \frac{\vartheta\cdot 27}{720}\left[\frac{-6}{400^4} + \frac{6}{100^4}\right] = 0{,}46587156$.

186. $2\left[\sqrt{10^4} - \sqrt{10^2}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{10^2} - \frac{1}{10}\right] + \frac{1}{24}\left[\frac{-1}{10^6} + \frac{1}{10^3}\right] + \frac{\vartheta}{720}\cdot\frac{15}{8}\left[\frac{1}{10^4} - \frac{1}{10^7}\right] = 180{,}045041625$.

187. $\log\left(\frac{\lg 1000}{\lg 500}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1000\lg 1000} - \frac{1}{500\lg 500}\right] + \frac{\vartheta}{12}\cdot\frac{1 + \frac{1}{\lg 100}}{10^4\lg 100} = 0{,}10751$.

СОДЕРЖАНИЕ.

I ч. Задачи (2265).

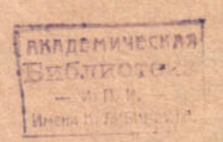
II ч. Ответы.

ОПЕЧАТКИ.

Стран.	*Задача №.*	*Строка.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
8	102			$\int \frac{x(3x^2+2a^2)}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$
15	320	9 св.	$\left[\frac{y}{2\sqrt{1+xy}}\right.$	$\left[\frac{x}{2\sqrt{1+xy}}\right.$
20	41	4 сн.	$x_0+\frac{1}{4}\Big[$	$x_0+\frac{a}{4}\Big[$
24	114	3 сн.	$a=$	$x=$
25	116	1 св.		$x=\frac{a}{2}\left[\overset{t}{e}(\sin t+\cos t)-1\right]$
25	116	2 св.		$y=\frac{a}{2}\left[\overset{t}{e}(\sin t-\cos t)+1\right]$
39	432		$\frac{z}{1+ct}$	$\frac{z}{l+ct}$
43	43	3 св.	$z=tht$	$z=atht$
45	101		$y^3+y^3=$	$x^3+y^3=$
46	127		$=ax^3$	$=a^3x$
46	127		$\int_0^{\sqrt{2ax-a^2}}$	$\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}$
54	285	9 св.	$=0{,}3\frac{x}{a}$	$=0,\ 3\frac{x}{a}$
58	347	10 сн.	$)\ xy$	$),\ xy$
58	351	2 сн.	$=\frac{x^3}{a}$	$=\frac{x^2}{d}$
61	394		$2pz-x^2$	$2pz=x^2$
64	395		$y^2=2px$	$y^2=2qx$

Стран.	*Задача №.*	*Строка.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
65	481		$-\frac{z}{k^2}$	$-\frac{z^2}{k^2}$
65	482		$=\frac{z}{1}$	$=\frac{z}{l}$
67	506		1^4	l^4
67	508		$\frac{z}{1}$	$\frac{z}{l}$
75	98		$(a^2 +$	$\left(\frac{a^2}{y'} +\right.$
75	126		$2y'^{\,2}\,\frac{1}{2}$	$2y\overline{'^2}\,\frac{1}{2}$
76	167		yy'''	$y'y'''$
78	226		$xe +$	$xe^x +$
80	264	6 св.	$(2t -)$	$(2t - 1)$
84	376		$+ x$	$= x$
85		6 св.	касательный	касательной
89	22		$\cos dx -$	$\cos bx -$
90	39		$\overline{x}$	$\overline{x^2}$
90	44		$\cos cx$	$\sin cx$
90	47		$\sin ax$	$\sin^5 ax$
91	56		bx	dx
92	82		$(x + b^2)$	$(x + b)^2$
95	116 (дважды)		$+ chx \cos\varphi$	$+ shx \cos\varphi$
96	125		$+ chx \cos\varphi$	$+ shx \cos\varphi$
97	4, 5, 6,		$\overline{n^1}$	$\overline{n^l}$
97	9		$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{l}$
99	64		$-\frac{5\,.\,6}{7!}$	$+\frac{5\,.\,6}{7!}$
104	129		$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2n}$
107	168		про	при
107	174		$\frac{1}{1\,.\,2}$	$\frac{1}{1\,.\,3}$
110	10		-1	$-i$
115	13		$-\frac{1}{4\sqrt{3}}$	$+\frac{3}{4\sqrt{3}}$
117	55		$\frac{2}{3\sqrt{2}}$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$
123	125		x^{-2}	$, x^{-2}$

Стран.	*Задача №.*	*Строка.*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
125	146		$\frac{1}{}$	$\frac{-1}{}$
126	157		$\underline{134}$	$\underline{135}$
127	174		$\sqrt{3^x(\quad)}$	$\sqrt{3^x}(\quad)$
137	325	8 св.	$+z$	$+x$
140	72			$=(aX)^\lambda+(bY)^\lambda,\ \lambda=\frac{n}{n-1}$
156	317	11 св.	$\overline{\times}$	$\overline{+}$
168	455			$R_2=-(x+y)$.


АКАДЕМИЧЕСКАЯ
— И. П. И. —


АКАДЕМИЧЕСКАЯ
БИБЛИОТЕКА
имени
К. Либкнехта.

